Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Петрозаводский государственный университет»

На правах рукописи

Шмидт Елизавета Сергеевна

Радиусы Бора и оператор Чезаро в некоторых классах аналитических функций и дифференциальные неравенства для многочленов

Специальность 1.1.1 –
Вещественный, комплексный и функциональный анализ

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
доктор физико-математических наук, профессор
Старков Виктор Васильевич

Петрозаводск — 2026

Оглавление

Введение

Актуальность темы исследования. Представленная диссертация посвящена трём классическим направлениям в области теории функций комплексного переменного. Объектами исследования являются неравенства типа Бора[1], обобщённый оператор Чезаро[2], а также дифференциальные неравенства для многочленов.

Пусть $\mathcal{B}$ – класс функций $f(z)$, аналитических в единичном круге $\Delta = \{z : |z| < 1\}$, удовлетворяющих условию $|f(z)| < 1$ для любого $z \in \Delta$.

Одним из научных направлений, которым занимался датский математик Харальд Бор было изучение абсолютной сходимости ряда Дирихле[3] $\sum a_n n^{-s}$. В процессе исследования он пришёл к необходимости изучения взаимосвязи между модулем степенного ряда и суммой модулей его членов. Именно в ходе этого исследования возникла задача, представляющая самостоятельный интерес, в частности, в [53] доказана классическая теорема Бора:

Теорема А. *[53] Если* $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in \mathcal{B}$, *то*

$$B_f(|z|) := \sum_{n=0}^{\infty} |a_n z^n| \leq 1$$

при $|z| \leq 1/6$*; то есть,* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n| 6^{-n} \leq 1$.

Позднее Н. Винер[4], М. Рисс[5] и И. Шур[6] независимо доказали справедли-

[1] Харальд Август Бор (1887–1951).
[2] Эрнесто Чезаро (1859–1906).
[3] Петер Густав Лежён Дирихле (1805–1859).
[4] Норберт Винер (1894–1964).
[5] Марсель Рисс (1886–1969).
[6] Исай Шур (1875–1941).

вость теоремы в круге $|z| \le 1/3$, об этом пишет сам Х. Бор в [53]. В этой же статье, с разрешения Н. Винера, Х. Бор приводит его доказательство для $|z| \le 1/3$. Константа $1/3$ точная, она называется классическим радиусом Бора в классе $\mathcal{B}$, а сумму $B_f(|z|)$ называют суммой Бора или мажорантным рядом функции $f(z)$. Другие доказательства теоремы Бора принадлежат, например, С. Сидону [99] и М. Томичу [102]. В своей статье М. Томич [102] приводит пример функции

$$\Psi(z) = \frac{a-z}{1-az}, \quad a \in (0,1),$$

которая показывает, что константа $1/3$ не может быть улучшена.

Пусть $\mathcal{W}$ – произвольный класс аналитических функций $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ в круге Δ с $|a_0| < 1$.

Определение 1. Радиусом Бора класса $\mathcal{W}$ называют число, равное супремуму всех радиусов $\rho = \rho(\mathcal{W})$ кругов $\Delta_\rho := \{z \in \Delta : \ |z| < \rho\}$, для которых $B_f(|z|) \le 1$ для любой функции $f \in \mathcal{W}$.

Р. Г. Диксон [59] в 1995 году показал связь между неравенством Бора и алгебрами Банаха[7], которые удовлетворяют неравенству фон Неймана[8]. Эта связь возродила интерес к исследованию проблемы радиуса Бора. В последнее время внимание многих математиков в области теории функций приковано к проблеме нахождения или оценки радиуса Бора в различных классах аналитических функций в одномерном и многомерном случае. Р. М. Али, Р. В. Бернард и А. Ю. Солынин [43] получили аналог теоремы Бора для знакопеременных рядов и нечётных аналитических функций. Работы Ю. Ф. Коробейника [3], Л. А. Айзенберга [4], А. А. Исмагилова [70], И. Р. Каюмова [72], [73] и их соавторов посвящены изучению радиуса Бора или его оценкам в разных классах аналитических функций в одномерном случае. Л. А. Айзенберг [42], Х. П. Боас и Д. Хавинсон [52], А. Дефант [57], Р.-Ю. Лин [82] и их соавторы получили ряд результатов в многомерном случае. Среди недавних исследований можно отметить работы И. Р. Каюмова, С. Поннусами, Д. М. Хамматовой [73], Р. Ш. Хасянова [75], [76].

[7]Стефан Банах (1892–1945).

[8]Джон фон Нейман (1903–1957).

Неравенства типа Бора имеют приложения, например, в теории операторов и функциональном анализе [73], [74]. В 2018 году А. А. Исмагилов, И. Р. Каюмов и их соавторы в [15] привели обзор научных результатов, посвященных неравенствам типа Бора. Обзорная статья Ю. Абу-Муханны, С. Поннусами и Р. М. Али [41] содержит информацию о биографии Х. Бора, а также о радиусе Бора для знакочередующихся рядов, гармонических отображений, в гиперболической метрике и других результатах.

Представленная диссертационная работа тесно связана с важным понятием линейно-инвариантного семейства аналитических функций в единичном круге. Оно было введено Х. Поммеренке[9] в 1964 году [91].

Пусть $g(z)$ – аналитическая функция, определённая в круге Δ, вида

$$g(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n(g)\, z^n, \;\; z \in \Delta. \tag{1}$$

Пусть $\mathcal{A}$ – множество аналитических и локально однолистных в Δ функций $g(z)$ с разложением (1), т. е. $\mathcal{A}$ состоит из функций $g(z)$, удовлетворяющих следующим условиям:

1) $g(0) = 0$,
2) $g'(z) = 1 + \ldots \neq 0$ для любого $z \in \Delta$.

Определение 2. [91] Множество $\mathfrak{M}$, состоящее из функций $g(z) \in \mathcal{A}$, называется линейно-инвариантным семейством (л.и.с.), если для любой функции $g \in \mathfrak{M}$ и для любого конформного автоморфизма

$$\phi(z) = e^{i\theta} \frac{z+a}{1+\overline{a}z}, \;\; a \in \Delta, \;\; \theta \in \mathbb{R},$$

единичного круга Δ, функция g_ϕ:

$$g_\phi(z) = \frac{g(\phi(z)) - g(\phi(0))}{g'(\phi(0))\phi'(0)} = z + \cdots$$

также принадлежит $\mathfrak{M}$.

[9] Христиан Поммеренке (1933–2024).

Число

$$\operatorname{ord}\mathfrak{M} = \sup_{g\in\mathfrak{M}} |a_2(g)|$$

называется порядком линейно-инвариантного семейства $\mathfrak{M}$.

Х. Поммеренке показал, что порядок линейно-инвариантного семейства $\mathfrak{M}$ всегда больше либо равен единице [91]. Оказалось, что многие свойства функций из л.и.с. зависят от порядка этого семейства.

Определение 3. [91] Универсальным линейно-инвариантным семейством порядка α является объединение всех л.и.с. $\mathfrak{M}$, для которых порядок $\operatorname{ord}\,\mathfrak{M} \le \alpha$, его обозначают $\mathcal{U}_\alpha$.

Некоторые известные классы аналитических функций являются линейно-инвариантными семействами. Среди них л.и.с. $\mathcal{K}$ выпуклых функций $f(z)$, т. е. $f(\Delta)$ – выпуклая область для любой функции $f(z) \in \mathcal{K}$, порядок $\operatorname{ord}\mathcal{K} = 1$; класс S однолистных в Δ функций – л.и.с. второго порядка. Другие примеры приведены в монографии В. В. Старкова [34, с. 8].

Другое направление диссертационного исследования связано с суммированием по Чезаро. Проблема суммирования расходящихся рядов интересовала математиков, начиная с XVII–XVIII веков, – среди них Г. В. Лейбниц[10], Ж. Л. Д'Аламбер[11], Ж. Л. Лагранж[12] и другие (см. [38, с. 6]). Основоположником суммирования расходящихся рядов является Л. Эйлер[13] [40, с. 101]. На самом деле, книга Л. Эйлера «Дифференциальное исчисление» [40] является переводом оригинала [61] 1755 года. Более подробно история вопроса, а также конкретные методы суммирования расходящихся рядов и их приложения к теории рядов Фурье изложены в [38].

В 1890 году итальянский математик Эрнесто Чезаро в своей работе «Об умножении рядов» [55] предложил новый эффективный метод суммирования расходящихся числовых рядов.

[10]Готфрид Вильгельм Лейбниц (1646–1716).
[11]Жан Лерон Д'Аламбер (1717–1783).
[12]Жозеф Луи Лагранж (1736–1813).
[13]Леонард Эйлер (1707–1783).

Пусть дан числовой ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad \text{и} \quad s_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k, \quad n \in \mathbb{N},$$

его частичная сумма. Если существует предел средних арифметических частичных сумм данного ряда

$$S = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} s_k = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{k} a_j,$$

то S называется суммой по Чезаро [11, с. 300].

Данный метод суммирования позволяет находить суммы некоторых расходящихся рядов. Впоследствии он стал известен как оператор Чезаро, подвергся обобщению и большое количество работ было посвящено изучению уже обобщённого оператора Чезаро и его свойств в разных функциональных пространствах, см., например, [67], [69], [103]. Более подробно об исследованиях Э. Чезаро и дальнейшем развитии данного направления можно прочесть в книге 2026 года Д. Машреги и У. Т. Росса «Чудеса оператора Чезаро» [84].

Для определения обобщённого оператора Чезаро потребуются некоторые обозначения. Пусть b – произвольное комплексное число. Далее используем обозначение символа Похгаммера [14]:

$$(b)_n := b(b+1)(b+2)\dots(b+n-1) = \frac{\Gamma(b+n)}{\Gamma(b)}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

В некоторых источниках его называют растущим или восходящим факториалом. При этом

$$(1)_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (1+n-1) = n! \quad \text{и} \quad (b)_0 = 1.$$

Обозначим

$$A_n^{\beta} := \frac{(\beta+1)_n}{(1)_n}.$$

[14] Лео Август Похгаммер (1841–1920).

Пусть $\psi(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \xi_n z^n$ – аналитическая ограниченная функция в круге Δ, $|\psi(z)| < 1$ для любого $z \in \Delta$. Для $\beta \in \mathbb{C}$ с $\operatorname{Re}\beta > -1$ для функций $\psi(z)$ в 1994 году К. Стемпак [100] (см. также [74]) определил обобщённый оператор Чезаро следующим образом:

$$C^{\beta}[\psi](z) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{A_{n-1}^{\beta+1}} \sum_{k=1}^{n} A_{n-k}^{\beta} \xi_{k-1} \right) z^{n-1}. \tag{2}$$

Именно такой вид обобщенного оператора Чезаро будет использоваться в диссертации. При $\beta = 0$ из (2) вытекает классический оператор Чезаро:

$$C^{0}[\psi](z) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{A_{n-1}^{1}} \sum_{k=1}^{n} A_{n-k}^{0} \xi_{k-1} \right) z^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \xi_{k-1} \right) z^{n-1} =$$

$$= \xi_0 + \frac{\xi_0 + \xi_1}{2} z + \frac{\xi_0 + \xi_1 + \xi_2}{3} z^2 + \ldots + \frac{\xi_0 + \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n}{n+1} z^n + \ldots$$

так как

$$A_{n-1}^{1} = \frac{(2)_{n-1}}{(1)_{n-1}} = \frac{2(2+1)\ldots(2+n-1-1)}{(n-1)!} = n$$

и

$$A_{n-k}^{0} = \frac{(1)_{n-k}}{(1)_{n-k}} = 1.$$

Многие известные математики в своих научных работах изучали и применяли в своих исследованиях приведённый метод усреднения. Рассмотрим некоторые из них. Для этого потребуются некоторые известные классы аналитических функций:

1) H^p – пространство Харди[15] (см., например, [60, с. 1]), $0 < p < \infty$ – это класс аналитических функций, определенных в круге Δ, для которых норма конечна, т. е.

$$||f||_{H^p} = \sup_{0<r<1} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| f(re^{i\theta}) \right|^p d\theta \right)^{1/p} < \infty, \ |z| = r, \theta \in [0, 2\pi].$$

[15] Годфри Харолд Харди (1877–1947).

Если $p = \infty$, то норма в H^∞ определяется так:

$$||f||_{H^\infty} = \sup_{0<r<1} |f(re^{i\theta})|, \quad \theta \in [0, 2\pi],\ |z| = r.$$

2) Класс BMOA – класс функций $f(z) \in H^1$ граничные значения которых имеют ограниченную среднюю осцилляцию (ограниченное среднее колебание) на границе единичного круга $\partial\Delta$ (см., например, [93]):

$$\sup_{|a|<1} \|f_a\|_1 < \infty, \quad f_a(z) = f\left(\frac{z+a}{1+\bar{a}z}\right) - f(a).$$

Х. Поммеренке в [93, лемма 1] доказал, что линейный оператор

$$T_g(f) = \int_0^z f(s)g'(s)ds$$

ограничен для любой функции $g(z) \in H^2$ при условии, что $f \in$ BMOA. При этом, если функция

$$g(z) = \log\left(\frac{1}{1-z}\right)$$

(ветвь логарифма главная), то оператор $T_g(f)$ является классическим оператором Чезаро (см. интегральное представление, например, в [100]).

Л. Фейер [16] в [62] для получения сходящегося функционального ряда также использовал метод усреднения. Он переходил к последовательности среднеарифметических заданной функциональной последовательности. Обобщению метода усреднения Чезаро также посвящены работы [68], [98] и [100].

Свойство ограниченности является одним из важнейших свойств линейных операторов. Ограниченные линейные операторы используют при решении прикладных задач. Ограниченность линейного оператора, заданного на Δ, равносильна непрерывности [16, с. 222].

Обобщённый оператор Чезаро применяется в изучении сингулярных и функционально-дифференциальных уравнений. В книге Н. В. Азбелева, В. П. Максимова и Л. Ф. Рахматуллиной [2, с. 176–179], в главе, посвящённой уравнению хи-

[16] Липот Фейер (1880–1959).

мического реактора, авторы от дифференциального уравнения переходят к операторному, где и возникает оператор Чезаро. Можно привести и другие примеры дифференциальных уравнений, в которых можно осуществить такой переход: в однородном уравнении Эйлера [31, с. 154], в уравнении Шрёдингера для одномерной частицы [36, с. 116] и других задачах. Такой приём упрощает расчеты. Это одна из многих причин изучения свойств операторов в разных функциональных пространствах. Такой переход можно увидеть в работах А. Р. Абдуллаева и Э. В. Плеховой [1], А. В. Кунгурцевой [17] и в работе В. П. Плаксиной, И. М. Плаксиной и Э. В. Плеховой [28]. В этих работах оператор Чезаро используется для доказательства достаточных условий разрешимости задачи Коши и для доказательства существования единственного решения. В [27] оператор Чезаро используется в изучении свойств модельной задачи, которая также возникает в некоторых химических реакциях.

И. Р. Каюмов, Д. М. Хамматова и С. Поннусами [74] в 2022 году перенесли понятие суммы Бора на оператор Чезаро. Авторы определили аналог суммы Бора для оператора Чезаро, действующего на функции $\psi(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \xi_n z^n$ из класса $\mathcal{B}$:

$$C_{\psi}^{\beta}(r) := \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{A_{n-1}^{\beta+1}} \sum_{k=1}^{n} A_{n-k}^{\beta} |\xi_{k-1}| \right) r^{n-1}.$$

Далее они доказали ограниченность обобщённого оператора Чезаро для $\psi(z) \in \mathcal{B}$ при $\beta > -1$, $|z| = r$:

$$|C^{\beta}[\psi](z)| \leq (\beta+1)\Phi(r, 1, \beta+1),$$

где $\Phi(z, s, a) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^n}{(n+a)^s}$ – трансцендентная функция Лерха [17].

В этой же работе для функций $\psi(z) \in \mathcal{B}$ и $\beta > -1$ доказано неравенство типа Бора для оператора Чезаро [74]:

$$C_{\psi}^{\beta}(r) \leq (\beta+1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n}{n+\beta+1}$$

[17] Матиаш Лерх (1860–1922).

для всех $r \leq R$, где $R = R(\beta)$ – минимальный положительный корень уравнения

$$3(1+\beta)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+\beta+1} = \frac{2}{1-x},$$

при этом радиус R не может быть улучшен.

В представленной диссертации решён вопрос ограниченности обобщённого оператора Чезаро для аналитических функций в Δ, которые принадлежат линейно-инвариантным семействам.

Следующее исследование связано с научными работами академиков С. Н. Бернштейна[18] и В. И. Смирнова[19]. Формулировка задачи принадлежит знаменитому химику Д. И. Менделееву[20], описанной в книге «Исследование водных растворов по удельному весу» [25, с. 287–295] (см. также [24, с. 255–261]):

Для вещественных многочленов $f(x)$ степени n, ограниченных на отрезке $[a,b]$ константой M, требуется дать наилучшую оценку $|f'(x)|$ на этом компакте.

В 1890 году [21] (см. также [20, с. 51–75]) эта задача была обобщена А. А. Марковым[21] на вещественные многочлены $f(x)$ n-го порядка, ограниченных на отрезке константой M. Доказана следующая оценка [21]:

$$|f'(x)| \leq \frac{2Mn^2}{b-a} \quad \text{для любого } x \in [a,b]. \tag{3}$$

Неравенство (3) точное, равенство достигается только для

$$f(x) = \pm M T_n\left(\frac{2x-a-b}{b-a}\right),$$

где $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$ – многочлены Чебышёва[22] В частности, если $f(x)$ – многочлен степени n, удовлетворяющий неравенству $|f(x)| \leq M = const$ на от-

[18] Сергей Натанович Бернштейн (1880–1968).
[19] Владимир Иванович Смирнов (1887–1974).
[20] Дмитрий Иванович Менделеев (1834–1907).
[21] Андрей Андреевич Марков (старший) (1856–1922).
[22] Пафнутий Львович Чебышёв (1821–1894).

резке $[-1,1]$, то справедливо неравенство:

$$|f'(x)| \leq n^2 M \quad \text{для любого} \quad x \in [-1,1]. \tag{4}$$

В 1892 году В. А. Марков[23] обобщил задачу Д. И. Менделеева [22, с. 81] на производные порядка $k > 1$ и доказал [22, с. 93] точное неравенство для $x \in [-1,1]$, $k \in \mathbb{N}$, $k \leq n$:

$$|f^{(k)}(x)| \leq \frac{n^2(n^2-1^2)(n^2-2^2)\dots(n^2-(k-1)^2)M}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2k-1)}. \tag{5}$$

Неравенство (5) точное, равенство достигается только для $f(x) = \pm M T_n(x)$.

В 1912 году С. Н. Бернштейн доказал справедливость неравенства [6, с. 25]

$$|f'(x)| \leq \frac{nM}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{для любого } x \in [-1,1], \tag{6}$$

которое является дополнением (4). Действительно, при $x \to \pm 1$ неравенство (4) даёт лучшую оценку, а при достаточно большом n неравенство (6) даёт лучшую оценку по сравнению с неравенством (4).

В 1939 году С. Н. Бернштейн в [7] (см. также [9, с. 281–286]) привёл более простое доказательство неравенства (5).

Позднее решение задачи Д. И. Менделеева было получено не только для вещественных алгебраических многочленов, но и для тригонометрических и комплексных. Ряд результатов в данном направлении принадлежит С. Н. Бернштейну, в частности, в 1930 году он доказал следующую теорему:

Теорема B. *[49] (см. также [8, с. 497], [95, с. 510]). Пусть $f(z)$ и $F(z)$ – многочлены, удовлетворяющие условиям:*

$$(*) \begin{cases} 1)\ \deg f \leq \deg F = n, \\ 2)\ \textit{все нули } F \textit{ лежат в замкнутом круге } \overline{\Delta} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}, \\ 3)\ |f(z)| \leq |F(z)| \textit{ на границе } \partial\Delta \textit{ этого круга.} \end{cases}$$

[23] Владимир Андреевич Марков (1871–1897).

Тогда для $|z| \geq 1$ *имеем*

$$|f'(z)| \leq |F'(z)|. \tag{7}$$

Для $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{\Delta}$ *в (7) равенство выполняется только если* $f = e^{i\gamma} F$, $\gamma \in \mathbb{R}$.

В. И. Смирнов и Н. А. Лебедев [24] в 1964 году в [32, с. 356] усилили результат С. Н. Бернштейна. Дифференциальный оператор $f(z) \longrightarrow f'(z)$ из теоремы В был заменён дифференциальным оператором

$$S_\tau[f](z) : f(z) \longrightarrow (zf'(z) - \tau f(z)),$$

где τ – комплексное число. Параметр τ дал дополнительные возможности для получения новых дифференциальных неравенств для многочленов.

Пусть $\rho \geq 1$ – фиксированное число, $n \in \mathbb{N}$. Через $D_{\rho,n}$ обозначим образ круга $\{t \in \mathbb{C} : |t| < \rho\}$ при отображении

$$\phi(t) = \frac{nt}{t+1}$$

(рисунок 1). При $\rho = 1$ множество $D_{\rho,n}$ – это полуплоскость $\mathcal{R}e\, z < n/2$ (рисунок 2).

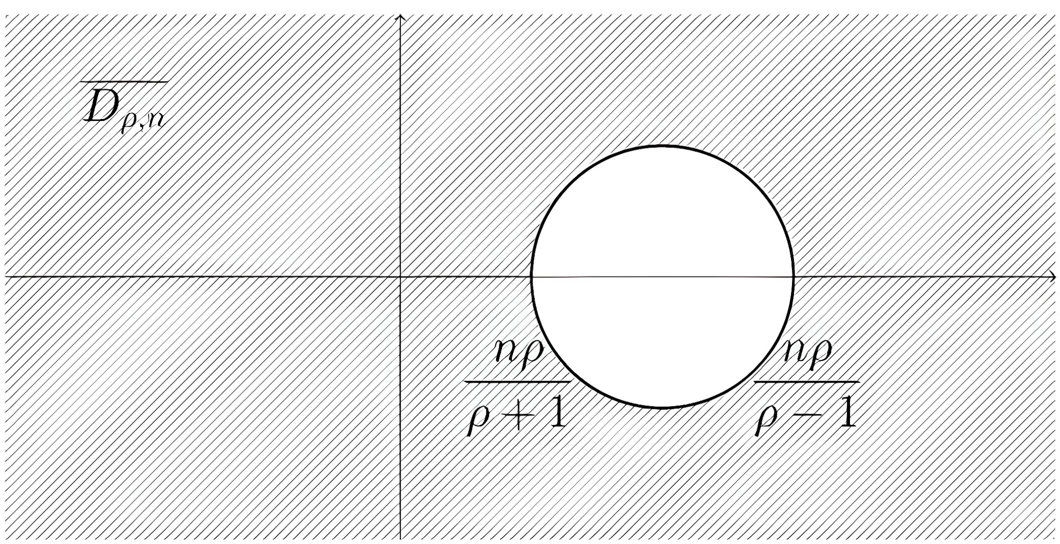

Рис. 1: Множество $\overline{D_{\rho,n}}$ при $\rho > 1$.

[24] Николай Андреевич Лебедев (1919–1982).

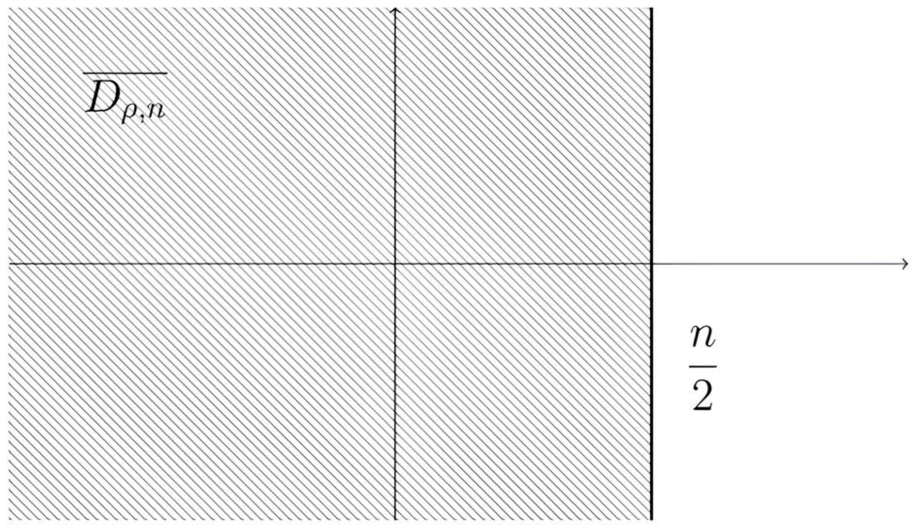

Рис. 2: Множество $\overline{D_{\rho,n}}$ при $\rho = 1$.

Теорема C. *[32, с. 356]. Пусть $f(z)$ и $F(z)$ – многочлены, удовлетворяющие условиям $(*)$; $\rho \geq 1$ – произвольное фиксированное число. Тогда для $|z| \geq \rho$*

$$|S_\tau[f](z)| \leq |S_\tau[F](z)| \tag{8}$$

для всех $\tau \in \overline{D_{\rho,n}}$.

При $|z| \geq \rho > 1$ и $\tau \in D_{\rho,n}$ в (8) равенство выполняется тогда и только тогда, когда $f = e^{i\gamma}F$, $\gamma \in \mathbb{R}$.

При $\tau = 0$ из неравенства (8) следует неравенство (7).

В действительности, в [32] проведено более тонкое исследование знака равенства в (8), когда $\tau \in \partial D_{\rho,n}$ или $z \in \partial\Delta$.

Теорема B положила начало активному изучению дифференциальных неравенств для многочленов и смежных проблем. Научные труды С. Н. Бернштейна [10], В. Н. Дубинина [12] и [13], А. Азиза [45], М. Мардена [83], К. И. Рахмана и Г. Шмайссера [95] и другие работы авторов стали классикой теории многочленов и заложили основу современного подхода к дифференциальным неравенствам для многочленов. К недавним работам можно отнести статьи Г. В. Миловановича [86], А. Мира [87], Н. А. Ратера [96] и их соавторов. Важными условиями в большинстве формулировок этих результатов являются условия $(*)$ или их модификации.

Естественно, возникает вопрос, насколько важны первые два пункта условий

$(*)$ в теореме В и можно ли получить аналог неравенства (7), если 1) или 2) в условии $(*)$ не будут выполнены. Будет ли этот аналог точным? Аналогичный вопрос можно ставить и по отношению к теореме С.

В [10, с. 168] С. Н. Бернштейн заметил, что если в теореме В нарушен пункт 1), т. е. $m = \deg\ f > \deg\ F = n$, то при выполнении условий 2) и 3) в $(*)$ для любого $z \in \mathbb{C} \setminus \Delta$ справедливо неравенство

$$|f'(z)| \le |(z^{m-n}F(z))'|.$$

Е. Г. Компанеец и В. В. Старков в [77] и [78] получили аналог неравенства (8) для оператора Смирнова в случае, когда в $(*)$ не выполняется условие 2), т. е. нули многочлена $F(z)$ могут лежать вне $\overline{\Delta}$. При этом множество значений τ в неравенстве (8) сложным образом зависит от расположения нулей многочлена $F(z)$, лежащих вне $\overline{\Delta}$.

Теорема D. *[77] Пусть $\rho \ge 1$, $f(z)$ и $F(z)$ – многочлены, удовлетворяющие условиям:*

1) $\deg f \le \deg F = n$,

2) $z_1, \dots, z_k$ – нули многочлена F, лежащие в $\mathbb{C} \setminus \overline{\Delta}$, имеющие порядок $d_1, \dots, d_k$, соответственно, $1 \le d = d_1 + \dots + d_k \le n - 1$,

3) $|f(z)| \le |F(z)|$ для $z \in \mathbb{C} \setminus \Delta$.

Тогда

$$|S_\tau[f](z)| \le |S_\tau[F](z)| \tag{9}$$

для $|z| = \rho$ и для $\tau \in D(\rho, k, n)$, где $D(\rho, k, n)$ – одно из множеств:

а) дополнение к кругу

$$\{\tau \in \mathbb{C} : |\tau - c| < r\},$$

где

$$c = (n-d)\frac{\rho^2}{\rho^2 - 1} + \rho^2 \sum_{j=1}^{k} \frac{d_j}{\rho^2 - |z_j|^2},$$

$$r=(n-d)\frac{\rho}{\rho^2-1}+\rho\sum_{j=1}^{k}\frac{d_j|z_j|}{|\rho^2-|z_j|^2|},$$

если $\rho>1$ *и все нули* $z_1,\dots,z_k$ *не принадлежат окружности* $|z|=\rho$;

b) дополнение к полосе

$$\left\{\tau\in\mathbb{C}:|\mathrm{Re}\,\tau-\omega|<(n-d)\frac{\rho}{\rho^2-1}\right\},$$

где

$$\omega=(n-d)\frac{\rho^2}{\rho^2-1}+\frac{d}{2},$$

если $\rho>1$ *и* $|z_1|=\dots=|z_k|=\rho$;

c) дополнение к полосе

$$\left\{\tau\in\mathbb{C}:|\mathrm{Re}\,\tau-x|<y\right\},$$

где

$$x=(n-d)\frac{\rho^2}{\rho^2-1}+\rho^2\sum_{j=1}^{s}\frac{d_j}{\rho^2-|z_j|^2}+\frac{1}{2}\sum_{j=s+1}^{k}d_j,$$

$$y=(n-d)\frac{\rho^2}{\rho^2-1}+\rho\sum_{j=1}^{s}\frac{d_j|z_j|}{|\rho^2-|z_j|^2|},$$

если $\rho>1$ *и* $|z_1|,\dots,|z_s|\neq\rho$, $|z_{s+1}|=\dots=|z_k|=\rho$ *для некоторого натурального* $s\leq k-1$, $1\leq d_1+\dots+d_s\leq n-2$;

d) полуплоскость

$$\left\{\tau\in\mathbb{C}:\mathrm{Re}\,\tau\leq\sum_{j=1}^{k}\frac{d_j}{1-|z_j|}+\frac{n}{2}\left(1-\frac{d}{n}\right)\right\},$$

если $\rho=1$.

В случае $z=z_j$ *для одного из* $j=1,\dots,k$ *и* $d_j>1$ *в (9) равенство справедливо для каждого* $\tau\in\mathbb{C}$ *и всех пар* $f(z)$ *и* $F(z)$, *удовлетворяющих условиям теоремы.*

Если же $z = z_j$, $d_j = 1$ *и* $\tau \in \mathbb{C}$ *или* $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{\Delta}$, $z \neq z_j$, $j = 1, \ldots, k$ *и* $\tau \in int\, D(\rho, k, n)$, *то в (9) равенство имеет место только в том случае, если* $f = e^{i\gamma} F$, $\gamma \in \mathbb{R}$.

В большинстве классических результатов о дифференциальных неравенствах для многочленов часто используется условие 2) условий ($*$): требуется, чтобы многочлен $F(z)$ имел все нули в единичном круге $\overline{\Delta}$. Однако существует ряд исследований, в которых условие принадлежности нулей многочлена $F(z)$ множеству $\overline{\Delta}$ (или $\mathbb{C} \setminus \Delta$) заменяется условием локализации нулей в компактном множестве с определенными ограничениями на его геометрию, см., например, результаты в книге В. И. Смирнова и Н. А. Лебедева [32, с. 351, 352, 365, 366], в статьях Х. Поммеренке [90] и Г. Сегё [101].

В книге В. И. Смирнова и Н. А. Лебедева [32, с. 362] была обобщена теорема C. В теореме C вместо единичного круга Δ рассматривался произвольный открытый круг $\Delta(w, R)$ с центром в точке w радиуса R или внешность этого круга.

Обозначим $[\xi, \eta]$ отрезок в $\mathbb{C}$ с концами ξ и η. Для $n \in \mathbb{N}$, $0 < \rho < 1$, через $D^*_{\rho,n}$ обозначим дополнение к замкнутому кругу с диаметром $\left[-\frac{n\rho}{1-\rho}, \frac{n\rho}{1+\rho}\right]$ (рисунок 3).

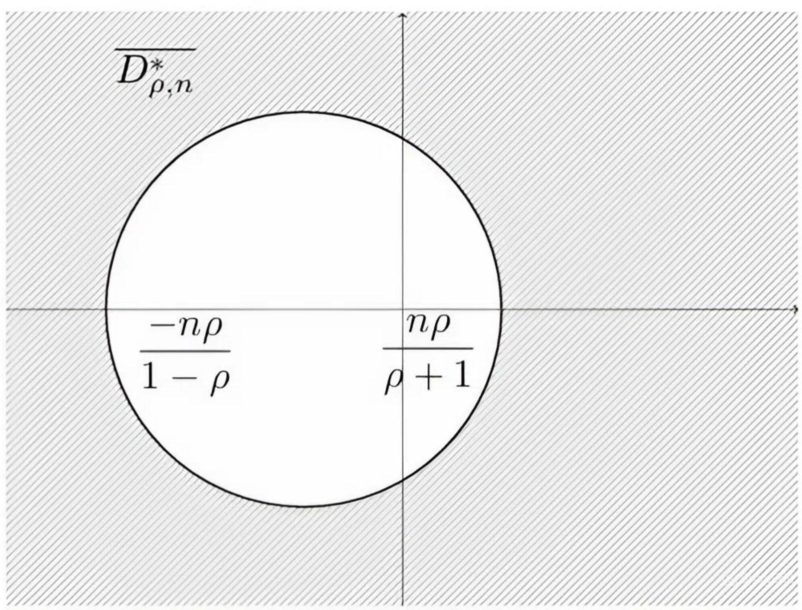

Рис. 3: Множество $\overline{D^*_{\rho,n}}$.

Теорема E. *[32, с. 362]. Пусть $f(z)$ и $F(z)$ — многочлены, удовлетворяющие условиям:*
1) $\deg f \le \deg F = n$,
2) *F имеет все свои нули в круге $\overline{\Delta(w,R)}$ (или в $\mathbb{C} \setminus \Delta(w,R)$),*
3) $|f(z)| \le |F(z)|$ *на $\partial\Delta(w,R)$.*
Предположим, что ρ, $\rho \ge 1$ (или $0 < \rho < 1$, соответственно) — фиксированное число. Тогда для z, $|z-w| \ge R\rho$ (или $|z-w| \le R\rho$, соответственно) справедливо неравенство:

$$|(z-w)f'(z) - \tau_1 f(z)| \le |(z-w)F'(z) - \tau_1 F(z)| \tag{10}$$

для $\tau_1 \in \overline{D_{\rho,n}}$ (или $\tau_1 \in \overline{D^*_{\rho,n}}$, соответственно).

Для z, $|z-w| \ge R\rho$, $\rho > 1$ и $\tau_1 \in D_{\rho,n}$ (или z, $|z-w| \le R\rho$, $\rho < 1$ и $\tau_1 \in D^*_{\rho,n}$, соответственно) в (10) равенство выполняется только для $f = e^{i\gamma}F$, $\gamma \in \mathbb{R}$.

В [32, с. 366], аналог теоремы C был получен для выпуклого множества:

Теорема F. *Пусть $B \subset \mathbb{C}$ — ограниченная строго выпуклая область. Для фиксированной точки $\zeta \in \partial B$ пусть $\overline{\Delta(w_\zeta, R_\zeta)}$ — замкнутый круг минимального радиуса, содержащий B, такой что $\zeta \in \partial\Delta(w_\zeta, R_\zeta)$ (рисунок 4). Зафиксируем $w_0 \in B$, $w_0 \ne w_\zeta$. Обозначим $\rho_* = \min\limits_{\zeta\in\partial B}\left|\dfrac{\zeta - w_0}{\zeta - w_\zeta}\right|$. Для функции $\psi(\zeta) = \arg\dfrac{\zeta - w_0}{\zeta - w_\zeta}$, непрерывной на ∂B, обозначим $\theta_1 = \min\limits_{\zeta\in\partial B}\psi(\zeta)$, $\theta_2 = \max\limits_{\zeta\in\partial B}\psi(\zeta)$.*

Рассмотрим многочлены $f(z)$ и $F(z)$ такие, что:
1) $\deg f \le \deg F = n$,
2) *F имеет все свои нули в B,*
3) $|f(z)| \le |F(z)|$ *на ∂B.*
Тогда для $z \notin B$ справедливо неравенство:

$$|(z-w_0)f'(z) - \tau f(z)| \le |(z-w_0)F'(z) - \tau F(z)| \tag{11}$$

для всех τ из множества $\Omega \ni 0$, ограниченного гладкой кривой, которая состоит

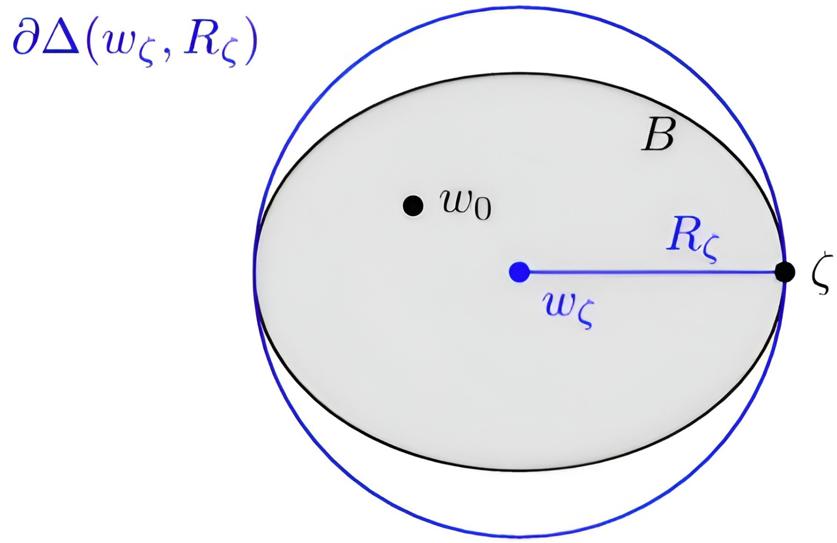

Рис. 4: К теореме F.

из дуги окружности

$$\Gamma = \Big\{\frac{n}{2}\rho_* e^{i\theta} : \theta_1 \le \theta \le \theta_2\Big\}$$

и двух лучей, исходящих из концов кривой Γ *(рисунок 5).*

Приведённые выше задачи относятся к актуальным задачам теории функций комплексного переменного. Большой вклад в развитие этой теории внесли известные математики: Г. М. Голузин, И. М. Милин, М. В. Келдыш, Н. А. Лебедев, И. А. Александров, В. Н. Дубинин, М. А. Лаврентьев, Л. А. Айзенберг, М. Марден, К. И. Рахман, Х. Поммеренке, Г. В. Милованович, Г. Харди, С. Поннусами и многие другие.

Цели и задачи диссертационной работы.

- Получение оценки радиуса Бора для аналитических в единичном круге функций, принадлежащих универсальному линейно-инвариантному семейству $\mathcal{U}_\alpha$;

- Получение оценки радиуса Бора для аналитических в единичном круге функций, принадлежащих классу

$$\mathfrak{L}\mathcal{U}_\alpha = \{f(z) = \log g'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f) z^n : \ g \in \mathcal{U}_\alpha\};$$

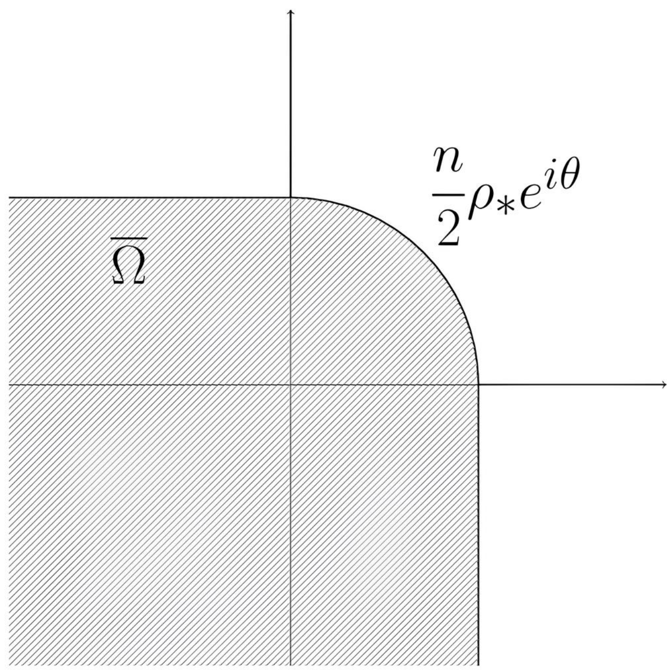

Рис. 5: Множество изменения параметра τ в теореме F.

- Доказательство ограниченности обобщённого оператора Чезаро для аналитических функций в единичном круге, принадлежащих $\mathfrak{LU}_\alpha$;
- Получение аналогов классической теоремы В. И. Смирнова, в которых снято ограничение на степени многочленов $f(z)$ и $F(z)$, а также расширены возможности локализации нулей многочлена $F(z)$.

Научная новизна. Все основные результаты диссертации являются новыми и получены автором самостоятельно, а именно: задачи об оценке радиуса Бора в универсальном линейно-инвариантном семействе $\mathcal{U}_\alpha$ и в классе $\mathfrak{LU}_\alpha$, а также вопрос об ограниченности обобщённого оператора Чезаро в классе $\mathfrak{LU}_\alpha$ ранее не рассматривались и решаются в диссертации впервые; в то же время положения, связанные с дифференциальными неравенствами для многочленов, представляют собой существенное расширение известных результатов: в работе снято ограничение на степени многочленов $f(z)$ и $F(z)$ и расширены возможности локализации нулей многочлена $F(z)$ из теоремы C.

Теоретическая и практическая значимость. Диссертационная работа носит теоретический характер. Полученные результаты представляют научный интерес и могут быть использованы при решении экстремальных задач комплексного анализа. Исследования, связанные с дифференциальными неравенствами для многочленов, могут быть использованы в теории приближения функций, в дальнейшем развитии теории дифференциальных неравенств. Также представленные результаты можно использовать в образовательном процессе.

Методы исследования. В диссертации использованы методы комплексного и вещественного анализа.

Положения, выносимые на защиту:

- Получена оценка радиуса Бора для аналитических функций в единичном круге, принадлежащих универсальному линейно-инвариантному семейству $\mathcal{U}_\alpha$;
- Доказана оценка радиуса Бора для аналитических функций в единичном круге, принадлежащих классу

$$\mathfrak{L}\mathcal{U}_\alpha = \{f(z) = \log g'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f) z^n : \ g \in \mathcal{U}_\alpha\};$$

- Доказана ограниченность обобщённого оператора Чезаро для аналитических функций в единичном круге, принадлежащих $\mathfrak{L}\mathcal{U}_\alpha$;
- Получены аналоги классической теоремы В. И. Смирнова, в которых снято ограничение на степени многочленов $f(z)$ и $F(z)$, а также расширены возможности локализации нулей многочлена $F(z)$.

Публикации. Основные положения диссертации опубликованы в 7 печатных работах; из них: [104] WoS (Q1), Scopus (Q1); [105] WoS (Q1), Scopus (Q3); в журналах из списка ВАК РФ, или приравненных к ним [106] (К3); 4 работы [107], [108], [109], [110] опубликованы в сборниках трудов конференций как тезисы докладов.

Степень достоверности и апробация результатов. Основные результаты диссертации были представлены на следующих конференциях и семинарах:

1) 75-я Всероссийская (с международным участием) научная конференция обучающихся и молодых ученых, Петрозаводский государственный университет, 3–23 апреля 2023 г., г. Петрозаводск.

2) Международная научная конференция «Уфимская осенняя математическая школа – 2023», Уфимский университет науки и технологий, 3–8 октября 2023 г., г. Уфа.

3) 76-я Всероссийская (с международным участием) научная конференция обучающихся и молодых ученых, Петрозаводский государственный университет, 1–21 апреля 2024 г., г. Петрозаводск.

4) Международная научная конференция «Уфимская осенняя математическая школа – 2024», Уфимский университет науки и технологий, 2–5 октября 2024 г., г. Уфа.

5) Всероссийский научный семинар «Проблемы математического анализа: исследования молодых ученых», 3 декабря 2024 г., Курский государственный университет, г. Курск.

6) 77-я Всероссийская (с международным участием) научная конференция обучающихся и молодых ученых, Петрозаводский государственный университет, 31 марта –27 апреля 2025 г., г. Петрозаводск.

7) XXIII Международная Саратовская зимняя школа «Современные проблемы теории функций и их приложения», посвящённая 90-летию профессора А. П. Хромова, СГУ имени Н.Г. Чернышевского, 27 января – 30 января 2026 г., г. Саратов.

8) Всероссийский научный семинар «Комплексный анализ и приложения»,

Петрозаводский государственный университет. На этом семинаре докладывались все представленные в диссертации результаты.

Личный вклад автора. Результаты первой главы получены и опубликованы в соавторстве с В. В. Старковым и С. Поннусами. В исследовании, связанном с обобщённым оператором Чезаро, профессору С. Поннусами принадлежит постановка задачи. Результаты третьей главы получены и опубликованы в соавторстве с В. В. Старковым и Е. Г. Компанеец. При проведении исследования В. В. Старкову и С. Поннусами принадлежит постановка задач, выбор метода исследования, некоторые идеи. Вклад диссертанта в публикации, подготовленные в соавторстве, равнозначен вкладу соавторов. Представленные к защите результаты получены лично автором.

Структура и объём диссертации. Диссертация состоит из введения, трёх глав, заключения, списка основных обозначений и списка литературы. Общий объём диссертации составляет 101 страницу. В диссертации 8 рисунков и 2 таблицы. Список литературы содержит 110 наименований, включая работы автора.

Содержание работы.

Во введении рассматривается история возникновения задач и приводится обзор научных результатов, связанных с темой диссертации. Также в этом разделе обоснована актуальность исследования, сформулированы цели и задачи, научная новизна, теоретическая и практическая значимость, методы исследования и положения, выносимые на защиту.

В первой главе доказана оценка радиуса Бора для линейно-инвариантных семейств аналитических функций. В разделе 1.2 для $f(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(f)z^n$, принадлежащих классу $\mathcal{M}$ – аналитических в Δ функций равномерно ограниченных на компактах из круга Δ, доказана вспомогательная

Лемма 1. *Пусть* $f(z)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(f)z^n \in \mathcal{M}$. *Обозначим*

$$A_n = \sup_{f\in\mathcal{M}} |a_n(f)| \quad \textit{и} \quad R_* = \sup\Big\{r: \sum_{n=1}^{\infty} A_n r^n \le 1\Big\}.$$

Тогда $R_* \le \rho(\mathcal{M})$. *Если* $\mathcal{M}$ *содержит функцию* $F(z)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(F)z^n$, *для которой все коэффициенты* $a_n(F)\ge 0$, $\sup\limits_{z\in\Delta}|F(z)|>1$ *и* r_F *— единственный корень уравнения* $F(r)=1$ *на интервале* $(0,1)$, *то* $\rho(\mathcal{M})\le r_F$.

В этом же разделе доказана оценка радиуса Бора в классе $\mathcal{U}_\alpha$:

Теорема 1.1. *Для* $\alpha\in(1,\infty]$, *радиус Бора в классе* $\mathcal{U}_\alpha$ *удовлетворяет неравенству*

$$\rho(\mathcal{U}_\alpha) \le \frac{(2\alpha+1)^{1/\alpha}-1}{(2\alpha+1)^{1/\alpha}+1}.$$

Теорема 1.1 даёт точную оценку для радиуса Бора в классе $\mathcal{K}$ выпуклых функций и в классе $\mathcal{S}$ однолистных функций.

Для функций из класса $\mathfrak{L}\mathcal{U}_\alpha$ доказана

Теорема 1.2. *Для* $\alpha>1$ *радиус Бора в классе* $\mathfrak{L}\mathcal{U}_\alpha$ *удовлетворяет неравенству*

$$R_+(\alpha) \le \rho(\mathfrak{L}\mathcal{U}_\alpha) \le r(\alpha),$$

где

$$R_+(\alpha) = \frac{2\alpha\left(-(1+2\alpha)+\sqrt{(1-2\alpha)^2+e\left(4\alpha-\frac{1}{\alpha}\right)}\right)}{4\alpha^2(e-2)-e} \quad \textit{и}$$

$$r(\alpha) = \frac{(2\sqrt{e}-1)^{2/(\alpha+1)}-1}{(2\sqrt{e}-1)^{2/(\alpha+1)}+1}.$$

Во второй главе уточнён вид обобщённого оператора Чезаро, который можно применять к аналитическим в Δ функциям $f(z)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n z^n$, принадлежащих линейно-инвариантным семействам:

$$C^{\beta}[f](z) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{A_{n-1}^{\beta}} \sum_{k=1}^{n} A_{n-k}^{\beta-1} a_k \right) z^n.$$

В дальнейшем такое представление позволит получить более точную оценку образов функций, принадлежащих л.и.с., под действием обобщённого оператора Чезаро. В частности, в разделе 2.3 доказана

Теорема 2.1 *Для любой функции* $f(z) \in \mathfrak{U}_{\alpha}$, $\alpha > 1$, $\beta > 0$, β *– оператор Чезаро ограничен и*

$$|C^{\beta}[f](z)| \leq 2\alpha\beta r \Phi(r, 1, \beta) + r^2 e \left(\alpha - \frac{1}{4\alpha} \right) \left(\frac{1}{1-r} - \beta \Phi(r, 1, \beta + 1) \right),$$

где $|z| = r$ *и* $\Phi(z, s, a) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^n}{(n+a)^s}$ *– трансцендентная функция Лерха.*

В третьей главе получены новые дифференциальные неравенства для многочленов, существенно расширяющие возможности их применения по отношению к ранее полученным. Показана взаимосвязь оператора Смирнова с полярной производной. В разделе 3.1 доказана теорема, которая расширяет возможности локализации нулей многочлена $F(z)$ из теоремы C:

Теорема 3.1 *Пусть* $\rho \geq 1$ *– фиксированное число;* $f(z)$ *и* $F(z)$ *– многочлены, удовлетворяющие условиям:*

1) $deg f \leq deg F = n$,

2) $z_1, \dots, z_k$ *– все нули многочлена* F *с учётом их кратности, лежащие в* $\mathbb{C} \setminus \overline{\Delta}$, $1 \leq k \leq n$,

3) $|f(z)| \leq |F(z)|$ *на* $\partial\Delta$.

Тогда для любого $|z| \geq \rho \geq 1$ *и* $\tau \in \overline{D_{\rho,n}}$ *справедливо неравенство:*

$$|S_{\tau}[f](z)| \leq |S_{\tau}[Fq](z)|, \qquad (12)$$

где S_{τ} *– оператор Смирнова,* $D_{\rho,n}$ *– множество из теоремы C,* $q(z) = \prod\limits_{j=1}^{k} \dfrac{1 - \overline{z_j} z}{z - z_j}$.

Для $|z| \geq \rho > 1$ и $\tau \in D_{\rho,n}$ равенство в (12) достигается только для $f(z) = e^{i\gamma}F(z)q(z)$, $\gamma \in \mathbb{R}$.

В разделе 3.2 с помощью теоремы 3.1 доказаны аналоги некоторых известных результатов о дифференциальных неравенствах для многочленов, в которых снято ограничение на расположение нулей многочлена $F(z)$.

В разделе 3.3 доказана теорема, которая снимает ограничение на степени многочленов $f(z)$ и $F(z)$ и ограничение на расположение нулей многочлена $F(z)$ из теоремы C:

Теорема 3.2 *Пусть $\rho \geq 1$ – фиксированное число. Пусть $f(z)$ и $F(z)$ – произвольные многочлены степеней m и n соответственно, для которых на границе $\partial\Delta$ единичного круга справедливо неравенство $|f(z)| \leq |F(z)|$. Множество $D_{\rho,n}$ изменения параметра τ – как в теореме 3.1. Пусть $\Lambda = \{z_1, \ldots, z_k\}$ – множество всех нулей многочлена $F(z)$ с учётом их кратности, лежащих в $\mathbb{C} \setminus \overline{\Delta}$; $q(z)$ из теоремы 3.1; если $\Lambda = \varnothing$, то полагаем $q(z) \equiv 1$. Тогда для $|z| \geq \rho \geq 1$ справедливы неравенства:*

$$|zf'(z) - m\tau f(z)| \leq |z|^l |z(F(z)q(z))' - (\tau - l)F(z)q(z)| \tag{13}$$

для $\tau \in \overline{D_{\rho,m}}$, если $l = m - n > 0$;

$$|zf'(z) - n\tau f(z)| \leq |z(F(z)q(z))' - \tau F(z)q(z)| \tag{14}$$

для $\tau \in \overline{D_{\rho,n}}$, если $m \leq n$.

Для $|z| \geq \rho > 1$ и $\tau \in D_{\rho,m}$ равенство в (13) достигается только для многочленов $f(z) = e^{i\gamma}z^l F(z)q(z)$. Для $|z| \geq \rho > 1$ и $\tau \in D_{\rho,n}$ равенство в (14) достигается только для многочленов $f(z) = e^{i\gamma}F(z)q(z)$, $\gamma \in \mathbb{R}$.

В этом же разделе доказан аналог классической теоремы В. И. Смирнова с локализацией нулей в произвольном компакте.

Теорема 3.3 *Пусть $E \subset \mathbb{C}$ – компактное множество, $B = conv\, E$ – выпуклая оболочка множества E. Рассмотрим многочлены $f(z)$ и $F(z)$, удовлетворяющие условиям:*

1) $\deg f \le \deg F = n$,

2) F *имеет все свои нули в* E,

3) $|f(z)| \le |F(z)|$ *на* ∂E.

Зафиксируем точку $z \notin B$. *Рассмотрим опорную прямую* l *к* B, $z \notin l$, *разделяющую* B *и* z *(см. рисунок 6). Возьмём круг* $\Delta(v_z, R_z)$, $v_z \ne z$, *такой что* $\Delta(v_z, R_z) \cap l = \varnothing$, $z \in \Delta(v_z, R_z)$, *и отрезок* $[z, v_z]$ *ортогонален* l. *Тогда*

$$|(z - v_z)f'(z) - \tau_1 f(z)| \le |(z - v_z)F'(z) - \tau_1 F(z)|, \tag{15}$$

для любого $\tau_1 \in \overline{D^*_{\rho_1, n}}$, *где* $\rho_1 = \dfrac{|z - v_z|}{R_z}$.

Для $\tau_1 \in D^*_{\rho_1, n}$ *в (15) равенство выполняется только если* $f(z) = e^{i\gamma}F(z)$, $\gamma \in \mathbb{R}$.

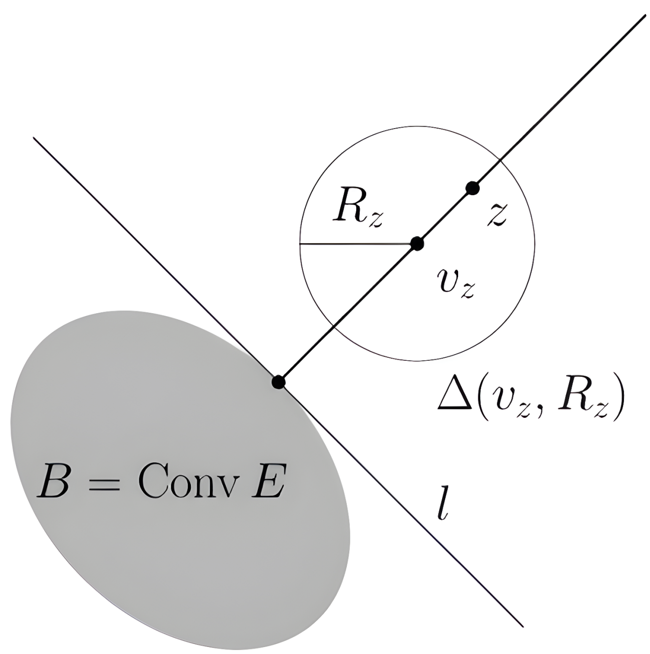

Рис. 6: К теореме 3.3.

В заключении диссертации приведены основные результаты, которые были получены в ходе исследования.

Благодарности. Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю, профессору Петрозаводского государственного университета

Старкову Виктору Васильевичу за постановку задач, постоянную поддержку и бесценную помощь на всех этапах работы. Участникам научного семинара «Комплексный анализ и приложения» ПетрГУ за полезные замечания и продуктивные обсуждения. Профессору математического факультета Индийского Технологического института Мадраса Поннусами Саминатхану за плодотворное сотрудничество.

Глава 1.

Радиус Бора в линейно-инвариантных семействах аналитических функций в единичном круге

1.1 Некоторые примеры

Пример 1.1. *Радиус Бора в классе $\mathcal{K}$ выпуклых функций равен* $1/2$.

Действительно, рассмотрим функцию

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}a_nz^n\in\mathcal{K}.$$

В классе $\mathcal{K}$ известны точные оценки коэффициентов $|a_n|\le 1$ (см., например, [14, с. 204]). Экстремальной здесь является функция

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}z^n=\frac{z}{1-z}$$

для любого $n\in\mathbb{N}$.

Пусть $|z|=r$, тогда из неравенства $\dfrac{r}{1-r}\le 1$ получается значение радиуса Бора в классе выпуклых функций $r=1/2$. При этом стоит отметить, что $\sup\limits_{f\in\mathcal{K}}|a_2(f)|=1$, следовательно, класс выпуклых функций – л.и.с. первого порядка.

Пример 1.2. *Класс $\mathcal{S}$ аналитических и однолистных в Δ функций $f(z)$ – линейно-инвариантное семейство второго порядка.*

Л. Бибербах [50] доказал, что для любой функции из класса $\mathcal{S}$ справедлива следующая оценка: $|a_2| \le 2$. В 1985 году Л. де Бранж[25] в [56] доказал сформулированную в 1916 году гипотезу Л. Бибербаха[26] об оценке коэффициентов функций из класса $\mathcal{S}$ [50]: $|a_n(f)| \le n$, $n \in \mathbb{N}$. Оценка точная, равенство достигается для функции Кёбе:

$$k(z) = \frac{z}{(1-z)^2} = z + 2z^2 + 3z^3 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} n z^n,$$

отображающей Δ на $\mathbb{C} \setminus (\infty, -1/4)$. Поэтому порядок $\operatorname{ord} \mathcal{S} = 2$.

Обозначим $M[0, 2\pi]$ класс функций $\mu(t)$, неубывающих на отрезке $[0, 2\pi]$, удовлетворяющих условию нормировки: $\mu(2\pi) - \mu(0) = 1$.

Пример 1.3. *Класс функций $\mathfrak{L}\mathcal{K} = \{\log f' \,:\, f \in \mathcal{K}\}$ – линейно-инвариантное семейство первого порядка.*

Как описано в примере 1.1 экстремальной функцией в задаче об оценке коэффициентов в классе $\mathcal{K}$ является

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} z^n = \frac{z}{1-z}.$$

Пусть

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n \in \mathfrak{L}\mathcal{K}.$$

Из итегрального представления в классе $\mathcal{K}$ [5, с. 68] (см. также [92, с. 42–49])

$$f(z) = \int_0^z \exp\left(-2\int_0^{2\pi} \ln(1 - e^{-it}\zeta)\, d\mu(t)\right) d\zeta,$$

где $\mu(t) \in M[0, 2\pi]$, следуют точные оценки коэффициентов в классе $\mathfrak{L}\mathcal{K}$. Действительно, рассмотрим производную

$$f' = \exp\left(-2\int_0^{2\pi} \ln(1 - e^{-it}\zeta)\, d\mu(t)\right),$$

[25] Луи де Бранж (родился в 1932 году).

[26] Людвиг Георг Элиас Моисей Бибербах (1886–1982).

следовательно,

$$\log f' = -2\int_0^{2\pi} \ln(1 - e^{-it}\zeta)\, d\mu(t).$$

Согласно известному разложению логарифма имеем:

$$\log f' = 2\int_0^{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-int}\frac{\zeta^n}{n}\, d\mu(t) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\zeta^n}{n} \int_0^{2\pi} e^{-int}\, d\mu(t).$$

Обозначим коэффициенты в разложении $\log f'$

$$b_n := \frac{2}{n}\int_0^{2\pi} e^{-int}\, d\mu(t)$$

и оценим модуль

$$|b_n| = \left|\frac{2}{n}\int_0^{2\pi} e^{-int}\, d\mu(t)\right| \le \frac{2}{n}\int_0^{2\pi} |e^{-int}|\, d\mu(t) = \frac{2}{n}.$$

Таким образом, из интегрального представления в классе $\mathcal{K}$ непосредственно получается известная точная оценка для коэффициентов $|a_n| \le 2/n$, $n \in \mathbb{N}$ для функций в $\mathfrak{L}\mathcal{K}$. Поскольку

$$g_0(z) = \frac{z}{(1-z)} \in \mathcal{K} \quad \text{и} \quad g_0'(z) = \frac{1}{(1-z)^2},$$

следует, что функция

$$F(z) = \log\frac{1}{(1-z)^2} = -2\log(1-z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} z^n \in \mathfrak{L}\mathcal{K}$$

является экстремальной. Следовательно, супремум модуля второго коэффициента в разложении функции

$$\log\left(\frac{z}{1-z}\right)' = \log\frac{1}{(1-z)^2} = -2\log(1-z) = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}$$

и есть порядок класса $\mathfrak{L}\mathcal{K}$.

Пример 1.4. *Функция*

$$k_\alpha(z) = \frac{1}{2\alpha}\left[\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^\alpha - 1\right]$$

принадлежит $\mathcal{U}_\alpha$.

Запишем разложение функции k_α по степеням z и покажем, что функция k_α имеет вид (1) из введения, т. е.

$$k_\alpha = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n(k_\alpha)\, z^n,\ \ z \in \Delta.$$

Действительно, используя известное разложение функции по степеням z, имеем:

$$k_\alpha(z) = \frac{1}{2\alpha}\left[\left(1 + \frac{2z}{1-z}\right)^\alpha - 1\right] = \frac{1}{2\alpha}\left[\left(1 + 2z \cdot \sum_{n=0}^{\infty} z^n\right)^\alpha - 1\right] =$$

$$= \frac{1}{2\alpha}\Bigg[1 + 2\alpha z \cdot \sum_{n=0}^{\infty} z^n + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}(2z)^2\left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right)^2 +$$

$$+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}(2z)^3\left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right)^3 + \ldots$$

$$+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-(n-1))}{n!}(2z)^n\left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right)^n + \ldots - 1\Bigg] =$$

в представленном разложении функции k_α нас интересуют коэффициенты при z и z^2. После сокращения единиц в последнем равенстве, коэффициенты при z и z^2 будут содержаться только в первых двух слагаемых, поэтому только их распишем подробнее:

$$= \frac{1}{2\alpha}\left[2\alpha z \cdot \sum_{n=0}^{\infty} z^n + 2\alpha(\alpha-1)z^2\left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right)^2 + \ldots\right] =$$

$$= \frac{1}{2\alpha}\left[2\alpha z \cdot (1 + z + z^2 + z^3 + \ldots) + 2\alpha(\alpha-1)z^2\left(1 + (z + z^2 + \ldots)\right)^2 + \ldots\right] =$$

вторую скобку второго слагаемого раскроем по формуле квадрата суммы:

$$= \frac{1}{2\alpha}\Bigg[2\alpha z \cdot (1 + z + z^2 + z^3 + \ldots) +$$

$$+2\alpha(\alpha - 1)z^2\left(1 + 2(z + z^2 + \ldots) + (z + z^2 + \ldots)^2\right) + \ldots\Bigg] =$$

$$= \frac{1}{2\alpha}\Bigg[2\alpha z \cdot (1 + z + z^2 + \ldots) + 2\alpha(\alpha - 1)z^2 + 2\alpha(\alpha - 1)z^2 2(z + z^2 + \ldots) +$$

$$+2\alpha(\alpha - 1)z^2(z + z^2 + \ldots)^2 + \ldots\Bigg] =$$

третье и четвертое слагаемые содежат множители степеней z, начиная с третьей, поэтому раскрываем скобки и рассматриваем только те слагаемые, в которых есть z и z^2:

$$= \frac{1}{2\alpha}\Bigg[2\alpha z + 2\alpha z^2 + \ldots + 2\alpha(\alpha - 1)z^2 + \ldots\Bigg] = z + z^2 + (\alpha - 1)z^2 + \ldots$$

$$= z + \alpha z^2 + \ldots.$$

Таким образом, функция k_α имеет вид (1) (см. введение).

Х. Поммеренке показал [91, с. 117], что локально однолистная функция

$$g(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n(g) z^n,$$

опредлённая в круге Δ принадлежит универсальному линейно-инвариантному семейству $\mathcal{U}_\alpha$ тогда и только тогда, когда

$$\sup_{z\in\Delta}\left|-\overline{z} + \frac{1 - |z|^2}{2}\frac{g''(z)}{g'(z)}\right| \le \alpha.$$

При этом данное неравенство эквивалентно следующему:

$$\sup_{z\in\Delta}\left|-\overline{z} + \frac{1 - |z|^2}{2}(\log g'(z))'\right| \le \alpha. \tag{16}$$

Производная

$$k'_\alpha(z) = \frac{1}{2\alpha}\cdot\alpha\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{\alpha-1}\cdot\left(\frac{(1-z)+(1+z)}{(1-z)^2}\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{\alpha-1}\cdot\frac{2}{(1-z)^2} = \frac{(1+z)^{\alpha-1}}{(1-z)^{\alpha+1}}.$$

Учитывая, что

$$\log k'_\alpha = \log\frac{(1+z)^{\alpha-1}}{(1-z)^{\alpha+1}} = (\alpha-1)\log(1+z) - (\alpha+1)\log(1-z),$$

подставляем найденные значения в (16):

$$\sup_{z\in\Delta}\left|-\overline{z} + \frac{1-|z|^2}{2}((\alpha-1)\log(1+z) - (\alpha+1)\log(1-z))'\right| \le \alpha.$$

Покажем, что неравенство верное. Рассмотрим супремум левой части, преобразуем его, а после оценим сверху:

$$\sup_{z\in\Delta}\left|-\overline{z} + \frac{1-|z|^2}{2}\left(\frac{(\alpha-1)}{(1+z)} + \frac{(\alpha+1)}{(1-z)}\right)\right| =$$
$$= \sup_{z\in\Delta}\left|-\overline{z} + \frac{1-|z|^2}{2}\left(\frac{(\alpha-1)(1-z)+(\alpha+1)(1+z)}{(1-z^2)}\right)\right| =$$
$$= \sup_{z\in\Delta}\left|-\overline{z} + \frac{1-|z|^2}{2}\frac{2(\alpha+z)}{(1-z^2)}\right| =$$

приводим к общему знаменателю, раскрываем скобки, приводим подобные:

$$= \sup_{z\in\Delta}\left|\frac{-\overline{z}\cdot(1-z^2) + (1-|z|^2)(\alpha+z)}{(1-z^2)}\right| =$$
$$= \sup_{z\in\Delta}\left|\frac{-\overline{z} + |z|^2 z + \alpha + z - |z|^2\alpha - |z|^2 z}{(1-z^2)}\right| = \sup_{z\in\Delta}\left|\frac{-\overline{z} + \alpha + z - |z|^2\alpha}{(1-z^2)}\right| =$$
$$= \sup_{z\in\Delta}\left|\frac{\alpha(1-|z|^2) - \overline{z} + z}{(1-z^2)}\right| =$$

пусть $z = re^{i\phi}$, $\phi \in \mathbb{R}$, $r \in [0,1)$ тогда

$$= \sup_{z\in\Delta}\left|\frac{\alpha(1-r^2) - re^{-i\phi} + re^{i\phi}}{1-r^2e^{2i\phi}}\right| =$$

$$= \sup_{z\in\Delta}\left|\frac{\alpha(1-r^2) - r(\cos\,\phi - i\sin\,\phi) + r(\cos\,\phi + i\sin\,\phi)}{1-r^2(\cos\,2\phi + i\sin\,2\phi)}\right| =$$

$$= \sup_{z\in\Delta}\left|\frac{\alpha(1-r^2) + 2ir\sin\,\phi}{1-r^2(\cos\,2\phi + i\sin\,2\phi)}\right| = \sup_{z\in\Delta}\left(\frac{\sqrt{\alpha^2(1-r^2)^2 + 4r^2\sin^2\,\phi}}{\sqrt{(1-r^2\cos\,2\phi)^2 + r^4\sin^2\,2\phi}}\right) =$$

Знаменатель дроби упрощается:

$$\sqrt{(1-r^2\cos\,2\phi)^2 + r^4\sin^2\,2\phi} = \sqrt{1-2r^2\cos\,2\phi + r^4\cos\,2\phi + r^4\sin^2\,2\phi} =$$

$$= \sqrt{1-2r^2\cos\,2\phi + r^4} = \sqrt{1-2r^2\cos\,2\phi + r^4 + 2r^2 - 2r^2} =$$

и после выделения полного квадрата имеем:

$$= \sqrt{(1-r^2)^2 + 2r^2 - 2r^2\cos\,2\phi} = \sqrt{(1-r^2)^2 + 2r^2(1-\cos\,2\phi)}.$$

По формуле понижения степени заменим $(1-\cos\,2\phi) = 2\sin^2\phi$ и получим следующее выражение:

$$\sqrt{(1-r^2)^2 + 2r^2(1-\cos\,2\phi)} = \sqrt{(1-r^2)^2 + 4r^2\sin^2\phi}.$$

Таким образом,

$$\sup_{z\in\Delta}\left|-\overline{z} + \frac{1-|z|^2}{2}\frac{k''_\alpha(z)}{k'_\alpha(z)}\right| = \sup_{z\in\Delta}\left(\frac{\sqrt{\alpha^2(1-r^2)^2 + 4r^2\sin^2\,\phi}}{\sqrt{(1-r^2)^2 + 4r^2\sin^2\phi}}\right) =$$

$$= \sup_{z\in\Delta}\left(\frac{\sqrt{\alpha^2(1-r^2)^2 + 4r^2\sin^2\,\phi + (1-r^2)^2 - (1-r^2)^2}}{\sqrt{(1-r^2)^2 + 4r^2\sin^2\phi}}\right) =$$

$$= \sup_{z\in\Delta}\sqrt{\frac{(1-r^2)^2 + 4r^2\sin^2\,\phi + \alpha^2(1-r^2)^2 - (1-r^2)^2}{(1-r^2)^2 + 4r^2\sin^2\phi}} =$$

после почленного деления имеем:

$$\sup_{z\in\Delta}\sqrt{1+\frac{(1-r^2)^2(\alpha^2-1)}{(1-r^2)^2+4r^2\sin^2\phi}} \le \sup_{z\in\Delta}\sqrt{1+\frac{(1-r^2)^2(\alpha^2-1)}{(1-r^2)^2}} =$$
$$= \sup_{z\in\Delta}\sqrt{1+\alpha^2-1} = \alpha$$

так как $\alpha \ge 1$.

Таким образом доказано, что

$$\sup_{z\in\Delta}\left|-\overline{z}+\frac{1-|z|^2}{2}\frac{k''_\alpha(z)}{k'_\alpha(z)}\right| \le \alpha,$$

следовательно, функция $k_\alpha(z)$ принадлежит $\mathcal{U}_\alpha$.

Пример 1.5. *Для аналитической в единичном круге функции*

$$\omega(z) = \frac{a-z}{1-az}, \quad a \in (0,1),$$

сумма Бора

$$B_\omega(r) = \frac{a-r}{1-ar} \le 1$$

в круге радиуса $1/3$.

Как было описано во введении, М. Томич [102] пишет о том, что функция $\omega(z)$ демонстрирует, что константу $1/3$ нельзя уменьшить, но не доказывает это.

Это действительно так. Функция $\omega(z)$ отображает единичный круг Δ на Δ, следовательно, $|\omega(z)| \le 1$ для любого $z \in \Delta$, т. е. $\omega(z) \in \mathcal{B}$. Рассмотрим сумму

$$B_\omega(z) = \frac{a-z}{1-az} = (a-z)\sum_{n=0}^{\infty} a^n z^n = a\sum_{n=0}^{\infty} a^n z^n - z\sum_{n=0}^{\infty} a^n z^n =$$

$$= a + \sum_{n=1}^{\infty} a^{n+1}z^n - \sum_{n=1}^{\infty} a^{n-1}z^n = a + \sum_{n=1}^{\infty}(a^{n+1}-a^{n-1})z^n =$$

$$= a + (a^2-1)\sum_{n=1}^{\infty} a^{n-1}z^n = a + (a^2-1)\frac{z}{1-az} = a - (1-a^2)\frac{z}{1-az}.$$

Пусть $|z| = r$. Теперь рассмотрим сумму Бора для функции $\omega(z)$ и решим неравевство $B_\omega(r) \le 1$, т. е.

$$B_\omega(r) = a + (1-a^2)\frac{r}{1-ar} \le 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{a - a^2r + r - a^2r}{1-ar} \le 1 \quad \Longleftrightarrow$$

$$\frac{a - 2a^2r + r}{1-ar} \le 1 \quad \Longleftrightarrow \quad a - 2a^2r + r \le 1 - ar \quad \Longleftrightarrow$$

$$r(1 - 2a^2 + a) \le 1 - a \quad \Longleftrightarrow \quad r \le \frac{1-a}{-2a^2 + a + 1} \Longleftrightarrow$$

$$r \le \frac{1-a}{(a-1)(-2a-1)}$$

Отсюда вытекает, что в круге радиуса $r = \dfrac{1}{1+2a}$ сумма Бора функции

$$\omega(z) = \frac{a-z}{1-az}, \quad a \in (0,1),$$

не превосходит 1. Устремляя $a \to 1$, получаем $r = 1/3$. Этот пример показывает, что константа $1/3$ не может быть улучшена.

Функция $\omega(z)$ является экстремальной в задачах об оценке радиуса Бора не только в классе $\mathcal{B}$ ограниченных и аналитических в единичном круге функций, но в других классах, см., например, [41].

1.2 Оценка радиуса Бора в линейно-инвариантных семействах аналитических в круге функций

Пусть $\mathcal{M}$ – класс аналитических в Δ функций $f(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n z^n$, равномерно ограниченных на компактах из круга Δ, т.е. класс $\mathcal{M}$ состоит из функций $f(z)$, определенных на Δ, таких, что для любого компактного множества $\mathbb{K} \subset \Delta$ существует конечная константа $M(\mathbb{K}) > 0$ такая, что выполняется неравенство $|f(z)| \le M(\mathbb{K})$ для любого $z \in \mathbb{K}$.

Пример 1.6. *Функция Кёбе* $k(z) = \dfrac{z}{(1-z)^2}$ *равномерно ограничена на компактах из круга* Δ.

Действительно, функция $k(z)$ аналитична в Δ. При этом в качестве произвольных компактов можно рассматривать концентрические круги $|z| \le r$, $0 < r < 1$. Отсюда по принципу максимума будет следовать оценка модуля функции Кёбе:

$$|k(z)| = \left|\frac{z}{(1-z)^2}\right| \le \frac{r}{(1-r)^2} := M(\mathbb{K}).$$

Таким образом, функция $k(z)$ равномерно ограничена на произвольном компакте из круга Δ.

Далее потребуется вспомогательная

Лемма 1. *Пусть* $f(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(f) z^n \in \mathcal{M}$. *Обозначим*

$$A_n = \sup_{f \in \mathcal{M}} |a_n(f)| \quad \text{и} \quad R_* = \sup\Big\{r : \sum_{n=1}^{\infty} A_n r^n \le 1\Big\}.$$

Тогда $R_* \le \rho(\mathcal{M})$. *Если* $\mathcal{M}$ *содержит функцию* $F(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(F) z^n$, *для которой все коэффициенты* $a_n(F) \ge 0$, $\sup\limits_{z \in \Delta} |F(z)| > 1$ *и* r_F *— единственный корень уравнения* $F(r) = 1$ *на интервале* $(0, 1)$, *то* $\rho(\mathcal{M}) \le r_F$.

Доказательство. Для каждой функции $f(z) \in \mathcal{M}$ обозначим

$$r_f = \sup\Big\{r : \sum_{n=1}^{\infty} |a_n(f)| r^n \le 1\Big\}.$$

По определению радиуса Бора, $\rho(\mathcal{M}) = \inf\limits_{f \in \mathcal{M}} r_f$. Определение A_n подразумевает

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n(f)| r^n \le \sum_{n=1}^{\infty} A_n r^n \quad \forall\, f(z) \in \mathcal{M}.$$

Следовательно, для любой функции $f(z) \in \mathcal{M}$

$$\sup\left\{r:\ \sum_{n=1}^{\infty}|a_n(f)|r^n \le 1\right\} \ge \sup\left\{r:\ \sum_{n=1}^{\infty}A_n r^n \le 1\right\} \iff r_f \ge R_*.$$

Таким образом, следует, что $R_* \le \rho(\mathcal{M})$. Поскольку

$$\rho(\mathcal{M}) = \inf_{f\in\mathcal{M}} r_f,$$

мы имеем следующее неравенство для функции $F(z)$, указанной в формулировке леммы:

$$\rho(\mathcal{M}) \le \sup\left\{r:\ \sum_{n=1}^{\infty}a_n(F)r^n \le 1\right\} = \sup\{r:\ F(r)=1\} = r_F.$$

$\square$

Следствие 1. *Если выполняются предположения, сделанные в лемме 1, функция $F(z)$ реализует максимум в задаче $\max\limits_{f\in\mathcal{M}}|a_n(f)|$ для любого $n\in\mathbb{N}$, тогда $R_* = r_F$ и $\rho(\mathcal{M})$ является единственным корнем уравнения $F(r)=1$.*

Используя следствие 1, можно получить радиус Бора в классе $\mathfrak{L}\mathcal{K}$.

Пример 1.7. *Радиус Бора в классе $\mathfrak{L}\mathcal{K}$ равен*

$$\rho(\mathfrak{L}K) = 1 - \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

Доказательство. Пусть $g(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n z^n \in \mathfrak{L}\mathcal{K}$. Так как (см. пример 1.3) функция

$$F(z) = \log\frac{1}{(1-z)^2} \in \mathfrak{L}\mathcal{K}$$

является экстремальной в задаче об оценке коэффициентов в классе $\mathfrak{L}\mathcal{K}$, то по следствию 1, решая уравнение $F(r)=1$, а именно

$$\log\frac{1}{(1-r)^2} = 1 \Leftrightarrow (1-r)^{-2} = e \Leftrightarrow 1-r = e^{-1/2},$$

получаем, что

$$\rho(\mathfrak{L}\mathcal{K}) = 1 - \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

□

В связи с доказательством леммы 1 сделаем следующее

Замечание 1.1. В классе $\mathcal{M}$, указанном в лемме, может быть много функций $F(z) \not\equiv 0$ с неотрицательными коэффициентами. Для каждой такой функции $F(z)$, как показано в лемме, верно неравенство $\rho(\mathcal{M}) \le r_F$. Более того, такая верхняя граница для радиуса Бора $\rho(\mathcal{M})$ является более точной, чем больше коэффициенты $a_n(F)$ функции $F(z)$.

Пример 1.8. *Радиус Бора в классе $\mathcal{S}$ равен*

$$\rho(\mathcal{S}) = \frac{3-\sqrt{5}}{2}.$$

Доказательство. Пусть

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \in \mathcal{S}.$$

Класс $\mathcal{S}$ удовлетворяет условиям леммы 1. Так как для любой функции $f(z) \in \mathcal{S}$ справедливы оценки коэффициентов: $|a_n| \le n$, для любого $n \in \mathbb{N}$, то по следствию 1 найдём радиус Бора $\rho(\mathcal{S})$. В силу того, что равенства достигаются для функции Кёбе

$$k(z) = \frac{z}{(1-z)^2} \in \mathcal{S}$$

для каждого $n \in \mathbb{N}$, то радиусом Бора будет корень уравнения $k(r) = 1$ на интервале $(0, 1)$:

$$\frac{r}{(1-r)^2} = 1 \Leftrightarrow r = (1-r)^2 \Leftrightarrow r^2 - 3r + 1 = 0.$$

Таким образом, получен радиус Бора в классе $\mathcal{S}$. □

Теорема 1.1. *Для $\alpha \in (1, \infty]$, радиус Бора в классе $\mathcal{U}_\alpha$ удовлетворяет неравен-*

ству

$$\rho(\mathcal{U}_\alpha) \le \frac{(2\alpha+1)^{1/\alpha}-1}{(2\alpha+1)^{1/\alpha}+1}.$$

Доказательство. Для фиксированного α функции, принадлежащие $\mathcal{U}_\alpha$, равномерно ограничены на компактах из Δ (см. [91]). Поэтому применима лемма 1. Функция

$$k_\alpha(z) = \frac{1}{2\alpha}\left[\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^\alpha - 1\right]$$

принадлежит $\mathcal{U}_\alpha$ (см. пример 1.4, [91, с. 117]). Покажем, что эта функция имеет положительные коэффициенты в разложении в ряд Тейлора по степеням z. Действительно, рассмотрим новую функцию

$$\omega(z) = \log k'_\alpha(z).$$

Здесь $\log k'(0) = \log 1 = 0$ и $\omega(z)$ аналитична в Δ по теореме о монодромии. Преобразуем её

$$\begin{aligned}\omega(z) &= \log\frac{(1+z)^{\alpha-1}}{(1-z)^{\alpha+1}} = (\alpha-1)\log(1+z) - (\alpha+1)\log(1-z) = \\ &= (\alpha-1)\sum_{k=1}^\infty(-1)^{k-1}\frac{z^k}{k} + (\alpha+1)\sum_{k=1}^\infty\frac{z^k}{k} = \\ &= \sum_{k=1}^\infty\frac{T_k}{k}z^k, \quad T_k := (\alpha-1)(-1)^{k-1} + (\alpha+1).\end{aligned}$$

Коэффициенты T_k в этом разложении положительны для каждого $k \ge 1$:

$$T_k = \begin{cases} 2\alpha, & \text{если } k \text{ нечётное,} \\ 2, & \text{если } k \text{ чётное.}\end{cases}$$

Это означает, что при разложении в ряд Тейлора в окрестности нуля функция

$$k'_\alpha(z) = \exp(\omega(z))$$

имеет положительные коэффициенты как суперпозиция функций с положительными коэффициентами. Следовательно, коэффициенты функции k_α в разложении в ряд Тейлора все положительные и

$$\sup_{z\in\Delta} |k_\alpha(z)| = \infty.$$

Применим лемму 1, где в качестве $F(z)$ возьмем функцию k_α. Находим корень $R(\alpha)$ уравнения $k_\alpha(r) = 1$:

$$\frac{1}{2\alpha}\left[\left(\frac{1+r}{1-r}\right)^\alpha - 1\right] = 1 \Longleftrightarrow \left(\frac{1+r}{1-r}\right)^\alpha = 2\alpha + 1 \Longleftrightarrow \frac{1+r}{1-r} = (2\alpha+1)^{1/\alpha} \Longleftrightarrow$$

$$1 + r = (2\alpha+1)^{1/\alpha} - r(2\alpha+1)^{1/\alpha} \Longleftrightarrow$$

$$r\left((2\alpha+1)^{1/\alpha} + 1\right) = (2\alpha+1)^{1/\alpha} - 1 \Longleftrightarrow$$

$$r = \frac{(2\alpha+1)^{1/\alpha} - 1}{(2\alpha+1)^{1/\alpha} + 1} =: R(\alpha)$$

Таким образом, из леммы 1 получается оценка для радиуса Бора: $\rho(\mathcal{U}_\alpha) \le R(\alpha)$. □

В таблице 1.1 приведены оценки радиуса Бора в классе $\mathcal{U}_\alpha$ для натуральных $\alpha \in [1, 10]$.

Таблица 1.1: Некоторые значения $R(\alpha)$.

α	$R(\alpha)$
1	0.500000
2	0.381966
3	0.313406
4	0.267949
5	0.235297
6	0.210549
7	0.191055
8	0.175248
9	0.162136
10	0.151061
...	...

Замечание 1.2. Лемма 1 была использована в доказательстве теоремы 1.1, но следствие 1 не может быть применено к этой теореме, поскольку функция k_α для $\alpha > 1$ не является экстремальной для всех $n \in \mathbb{N}$ в определении $\max\limits_{f \in \mathcal{U}_\alpha} |a_n|$. Хотя некоторые результаты в $\mathcal{U}_\alpha$ давали надежду на это, в [54] даже была сформулирована гипотеза, что k_α является решением $\max\limits_{f \in \mathcal{U}_\alpha} |a_3|$, но это было опровергнуто в [33].

Замечание 1.3. Для $\alpha = 1$ теорема 1.1 даёт точную оценку для радиуса Бора в классе $\mathcal{K}$, поскольку

$$\rho(\mathcal{U}_1) = \rho(\mathcal{K}) \leq 1/2,$$

т. к. известно, что $\rho(\mathcal{K}) = 1/2$, и константа $1/2$ достигается для выпуклой функции $f(z) = \dfrac{z}{1-z}$ (см. пример 1.1).

Замечание 1.4. Для $\alpha = 2$ теорема 1.1 даёт точную оценку для радиуса Бора в классе $\mathcal{S}$, т. к.

$$\rho(\mathcal{U}_2) = \rho(\mathcal{S}) \leq \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

(см. пример 1.8).

Пусть $\mathfrak{B}$ — это класс аналитических функций Блоха в Δ, состоящий из функции g, для которых норма Блоха конечна (см., например, [65]):

$$||g||_{\mathfrak{B}} = |g(0)| + \sup_{z \in \Delta} (1-|z|)^2 |g'(z)| < \infty.$$

Для фиксированного α снова рассматриваем класс функций $\mathfrak{L}\mathcal{U}_\alpha = \{\log \phi' : \phi \in \mathcal{U}_\alpha\}$. Интерес к этому классу вызван, в частности, тем, что (см. [91]) для любого $\lambda \in [0,1]$ и $\lambda f_1(z) + (1-\lambda) f_2(z) \in \mathfrak{L}\mathcal{U}_\alpha$ всякий раз когда $f_1(z), f_2(z) \in \mathfrak{L}\mathcal{U}_\alpha$, т. е. класс $\mathfrak{L}\mathcal{U}_\alpha$ является выпуклым. Более того, хорошо известна тесная связь между классами $\mathfrak{L}\mathcal{U}_\alpha$ и $\mathfrak{B}$. Для каждой функции $g(z) \in \mathfrak{B}$ существует константа $\alpha \in [1, \infty)$, такая что

$$(g(z) - g(0)) = \log f'(z) \in \mathfrak{L}\mathcal{U}_\alpha,$$

где $\operatorname{ord} f = \alpha$ и выполнено неравенство:

$$||g(z) - g(0)|| \le 2(\alpha + 1) \quad \text{(см. [54]).}$$

Также, для каждого $\alpha \in [1, \infty)$ и заданной функции $g(z) \in \mathfrak{L}\mathcal{U}_\alpha$ следует, что $g(z) \in \mathfrak{B}$ и справедливо

$$||g||_{\mathfrak{B}} \le 2(\alpha + 1) \quad \text{(см. [65]).}$$

Последние два неравенства не могут быть улучшены.

Следующая теорема даёт оценку для радиуса Бора в классе $\mathfrak{L}\mathcal{U}_\alpha$.

Теорема 1.2. *Для $\alpha > 1$ радиус Бора в классе $\mathfrak{L}\mathcal{U}_\alpha$ удовлетворяет неравенству*

$$R_+(\alpha) \le \rho(\mathfrak{L}\mathcal{U}_\alpha) \le r(\alpha),$$

где

$$R_+(\alpha) = \frac{2\alpha\left(-(1+2\alpha) + \sqrt{(1-2\alpha)^2 + e\left(4\alpha - \frac{1}{\alpha}\right)}\right)}{4\alpha^2(e-2) - e} \quad \text{и}$$

$$r(\alpha) = \frac{(2\sqrt{e} - 1)^{2/(\alpha+1)} - 1}{(2\sqrt{e} - 1)^{2/(\alpha+1)} + 1}.$$

Доказательство. Пусть $f(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n z^n \in \mathfrak{L}\mathcal{U}_\alpha$ и $|z| = r$. В классе $\mathfrak{L}\mathcal{U}_\alpha$ пусть $A_n(\alpha) = \sup\limits_{f \in \mathfrak{L}\mathcal{U}_\alpha} |a_n(f)|$. Из определения $\mathcal{U}_\alpha$ следует, что

$$A_1(\alpha) = \sup_{f \in \mathfrak{L}\mathcal{U}_\alpha} |a_1(f)| \le 2\alpha. \tag{17}$$

Действительно, так как (см. определение 3) класс $\mathcal{U}_\alpha$ является объединением всех л.и.с. $\mathfrak{M}$ для которых

$$\operatorname{ord} \mathfrak{M} = \sup_{g \in \mathfrak{M}} |a_2(g)| \le \alpha,$$

то из разложения (1) функции (см. введение)

$$g(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n(g)\, z^n,\ \ z \in \Delta,$$

следует, что

$$g'(z) = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} n a_n(g)\, z^{n-1},\ \ z \in \Delta.$$

Следовательно,

$$f(z) = \log g'(z) = \log\left(1 + \sum_{n=2}^{\infty} n a_n(g) z^{n-1}\right).$$

По известному разложению логарифма в ряд по степеням z имеем:

$$f(z) = \sum_{n=2}^{\infty} n a_n(g) z^{n-1} - \frac{1}{2}\left(\sum_{n=2}^{\infty} n a_n(g) z^{n-1}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\sum_{n=2}^{\infty} n a_n(g) z^{n-1}\right)^3 + \ldots.$$

Откуда следует, что

$$\sup_{f \in \mathfrak{L}\mathcal{U}_\alpha} |a_1(f)| = \sup_{g \in \mathcal{U}_\alpha} |2a_2(g)| \le 2\alpha.$$

Далее нам потребуются оценки $A_n(\alpha)$ (см. [71]):

$$\frac{(\alpha - 1)\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\left(1 - \frac{2}{n+1}\right)^{(n-1)/2}} \le A_n(\alpha) \le \frac{2\left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^2\right)}{\left(2 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-1}}. \tag{18}$$

Используя (17) и (18), можно оценить сумму

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|\, |z|^n \le 2\alpha r + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2\left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^2\right)}{\left(2 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-1}} r^n.$$

Заметим, что $(1 - 1/n)^2 \ge 1/4$ для всех $n \ge 2$. Обозначим $t = 1/n$, $n \in \mathbb{N}$ и введём следующую функцию:

$$N(t) = \ln\left[\frac{(1-t)^{1-\frac{1}{t}}}{(2-t)}\right], \quad t \in (0, 1/2].$$

Исследуем её на монотонность. Производная

$$N'(t) = \frac{(2-t)}{(1-t)^{1-\frac{1}{t}}} \cdot \left(\frac{(1-t)^{1-\frac{1}{t}}}{(2-t)}\right)' =$$

$$= \frac{(2-t)}{(1-t)^{1-\frac{1}{t}}} \cdot \left(\frac{(1-t)^{1-\frac{1}{t}}\left(\frac{1}{t^2}\ln(1-t) - \left(1-\frac{1}{t}\right)\frac{1}{1-t}\right)(2-t)}{(2-t)^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{(1-t)^{1-\frac{1}{t}}}{(2-t)^2}\right) =$$

и после почленного деления и преобразования получим:

$$= \frac{(2-t)^2}{(1-t)^{1-\frac{1}{t}}} \cdot \frac{(1-t)^{1-\frac{1}{t}}\left(\frac{1}{t^2}\ln(1-t) + \frac{1}{t}\right)}{(2-t)^2} + \frac{(2-t)}{(1-t)^{1-\frac{1}{t}}} \cdot \frac{(1-t)^{1-\frac{1}{t}}}{(2-t)^2} =$$

$$= \frac{1}{t^2}\ln(1-t) + \frac{1}{t} + \frac{1}{2-t} =$$

Перепишем дробь в виде:

$$\frac{1}{2-t} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\dfrac{t}{2}}.$$

Далее, после применения известных разложений функций в ряд по степеням t, последнее выражение перепишется следующим образом:

$$-\frac{1}{t^2}\left(t + \frac{t^2}{2} + ... + \frac{t^k}{k} + ...\right) + \frac{1}{t} + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{t}{2} + \left(\frac{t}{2}\right)^2 + ... + \left(\frac{t}{2}\right)^k + ...\right) =$$

$$= -\frac{1}{t} - \frac{1}{2} - \ldots - \frac{t^{k-2}}{k} + ... + \frac{1}{t} + \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{2^{k+1}} =$$

$$= -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k+2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{2^{k+1}}.$$

Таким образом,

$$\frac{1}{t^2} \ln(1-t) + \frac{1}{t} + \frac{1}{2-t} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{k+1}} - \frac{1}{k+2} \right) t^k.$$

k-й коэффициент в разложении функции $N'(t)$ в ряд Тейлора отрицательный, т. е.

$$\frac{1}{2^{k+1}} - \frac{1}{k+2} < 0 \Leftrightarrow 2^{k+1} \geq k+2.$$

Последнее неравенство верно для любого натурального k. Отсюда вытекает, что

$$N'(t) < 0 \quad \text{для} \quad t \in (0, 1/2],$$

т. е. $N(t)$ убывает для $t \in (0, 1/2]$. Следовательно, $N(1/n)$ возрастает для $n \geq 2$. Поэтому

$$\exp\{N(1/n)\} = \left(2 - \frac{1}{n}\right)^{-1} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{1-n}$$

возрастает для $n \geq 2$, и

$$\sup_{n \geq 2} \left(\exp N\left(\frac{1}{n}\right) \right) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\left(2 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-1}} = \frac{1}{2} \lim_{n \to \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{1-n} = \frac{e}{2}.$$

Следовательно,

$$2\alpha r + 2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^2\right)}{\left(2 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-1}} r^n \leq 2\alpha r + e\left(\alpha - \frac{1}{4\alpha}\right) \sum_{n=2}^{\infty} r^n.$$

Таким образом,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|\,|z|^n \le \varphi(r), \quad \text{где} \quad \varphi(r) = 2\alpha r + e\left(\alpha - \frac{1}{4\alpha}\right)\frac{r^2}{1-r}.$$

Теперь найдём максимальное значение r, для которого $\varphi(r) \le 1$. Функция $\varphi(r)$ является возрастающей функцией от r, т. к. производная

$$\varphi'(r) \,=\, 2\alpha + e\left(\alpha - \frac{1}{4\alpha}\right)\cdot\frac{2r(1-r)+r^2}{(1-r)^2} \,=\, 2\alpha + e\left(\alpha - \frac{1}{4\alpha}\right)\cdot\frac{r(2-r)}{(1-r)^2} \,>\, 0$$

для любого $r \in [0,\,1)$ и $\alpha > 1$. Отсюда следует, что достаточно решить уравнение $\varphi(r) = 1$, чтобы получить нижнюю оценку радиуса Бора в классе $\mathfrak{L}\mathcal{U}_\alpha$, т. е.

$$2\alpha r(1-r) + e\left(\alpha - \frac{1}{4\alpha}\right)r^2 = 1 - r,$$

$$2\alpha r - 2\alpha r^2 + e\left(\alpha - \frac{1}{4\alpha}\right)r^2 + r - 1 = 0,$$

$$r^2\left(\alpha e - \frac{e}{4\alpha} - 2\alpha\right) + r(1+2\alpha) - 1 = 0. \tag{19}$$

Коэффициент при r^2 в уравнении (19) положителен для любого $\alpha > 1$. Действительно,

$$\alpha e - \frac{e}{4\alpha} - 2\alpha > 0 \Leftrightarrow \alpha(e-2) > \frac{e}{4\alpha} \Leftrightarrow 4\alpha^2(e-2) > e \Leftrightarrow$$

$$\alpha^2 > \frac{e}{4(e-2)} \approx 0.9461\ldots$$

Это позволяет переписать уравнение (19) в следующем виде:

$$r^2 + r\frac{(1+2\alpha)}{\left(\alpha e - \frac{e}{4\alpha} - 2\alpha\right)} - \frac{1}{\left(\alpha e - \frac{e}{4\alpha} - 2\alpha\right)} = 0.$$

Заметим, что

$$\alpha e - \frac{e}{4\alpha} - 2\alpha = \frac{4\alpha^2 e - e - 8\alpha^2}{4\alpha} = \frac{4\alpha^2(e-2) - e}{4\alpha},$$

следовательно, квадратное уранение принимает следующий вид:

$$r^2 + r\frac{4\alpha(1+2\alpha)}{4\alpha^2(e-2)-e} - \frac{4\alpha}{4\alpha^2(e-2)-e} = 0.$$

Найдём корни этого уравнения с использованием дискриминанта D:

$$\begin{aligned}
D &= \left(\frac{4\alpha(1+2\alpha)}{4\alpha^2(e-2)-e}\right)^2 + 4\cdot\frac{4\alpha}{4\alpha^2(e-2)-e} = \\
&= \frac{16\alpha^2(1+2\alpha)^2 + 16\alpha\cdot\left(4\alpha^2(e-2)-e\right)}{(4\alpha^2(e-2)-e)^2} = \frac{16\alpha\left[\alpha(1+2\alpha)^2 + 4\alpha^2(e-2)-e\right]}{(4\alpha^2(e-2)-e)^2} = \\
&= \frac{16\alpha\left[\alpha+4\alpha^2+4\alpha^3+4\alpha^2e-8\alpha^2-e\right]}{(4\alpha^2(e-2)-e)^2} = \frac{16\alpha\left[\alpha-4\alpha^2+4\alpha^3+4\alpha^2e-e\right]}{(4\alpha^2(e-2)-e)^2} = \\
&= \frac{16\alpha\left[\alpha(1-2\alpha)^2+\alpha e\left(4\alpha-\frac{1}{\alpha}\right)\right]}{(4\alpha^2(e-2)-e)^2} = \frac{16\alpha^2\left[(1-2\alpha)^2+e\left(4\alpha-\frac{1}{\alpha}\right)\right]}{(4\alpha^2(e-2)-e)^2} > 0
\end{aligned}$$

для любого $\alpha > 1$. Следовательно, корнями квадратного уравнения являются

$$r_{1,2} = \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{4\alpha(1+2\alpha)}{4\alpha^2(e-2)-e} \pm \sqrt{\frac{16\alpha^2\left[(1-2\alpha)^2+e\left(4\alpha-\frac{1}{\alpha}\right)\right]}{(4\alpha^2(e-2)-e)^2}}\right)$$

или

$$r_{1,2} = \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{4\alpha(1+2\alpha)}{4\alpha^2(e-2)-e} \pm \frac{4\alpha\sqrt{(1-2\alpha)^2+e\left(4\alpha-\frac{1}{\alpha}\right)}}{(4\alpha^2(e-2)-e)}\right).$$

После приведения к общему знаменателю и сокращения имеем:

$$r_{1,2} = \frac{2\alpha\left(-(1+2\alpha) \pm \sqrt{(1-2\alpha)^2+e\left(4\alpha-\frac{1}{\alpha}\right)}\right)}{4\alpha^2(e-2)-e}.$$

Отрицательный корень уравнения нам не подходит по смыслу, покажем, что

$$r = \frac{2\alpha\left(-(1+2\alpha) + \sqrt{(1-2\alpha)^2+e\left(4\alpha-\frac{1}{\alpha}\right)}\right)}{4\alpha^2(e-2)-e} > 0.$$

Как было показано ранее, знаменатель положителен для любого $\alpha > 1$. Покажем, что

$$-(1+2\alpha)+\sqrt{(1-2\alpha)^2+e\left(4\alpha-\frac{1}{\alpha}\right)}>0,$$

т. е.

$$\sqrt{(1-2\alpha)^2+e\left(4\alpha-\frac{1}{\alpha}\right)}>1+2\alpha.$$

После равносильной цепочки преобразований имеем:

$$(1-2\alpha)^2+e\left(4\alpha-\frac{1}{\alpha}\right)>(1+2\alpha)^2 \Leftrightarrow 4\alpha e-\frac{e}{\alpha}>8\alpha \Leftrightarrow$$
$$4\alpha(e-2)-\frac{e}{\alpha}>0 \text{ для любого } \alpha>1.$$

Следовательно, корень уравнения (19)

$$r=\frac{2\alpha\left(-(1+2\alpha)+\sqrt{(1-2\alpha)^2+e\left(4\alpha-\frac{1}{\alpha}\right)}\right)}{4\alpha^2(e-2)-e}$$

положителен. Это даёт максимальное значение r, для которого $\varphi(r)\le 1$, обозначим его $R_+(\alpha)$.

Таким образом, по определению радиуса Бора $\rho(\mathfrak{L}\mathcal{U}_\alpha)$ класса $\mathfrak{L}\mathcal{U}_\alpha$, получается неравенство

$$R_+(\alpha)\le\rho(\mathfrak{L}\mathcal{U}_\alpha).$$

Поскольку функция $\omega=\log k'_\alpha(z)\in\mathfrak{L}\mathcal{U}_\alpha$ (см. доказательство теоремы 1.1) и

$$\log k'_\alpha(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{T_k}{k}z^k,\quad T_k=(\alpha-1)(-1)^{k-1}+(\alpha+1)>0,$$

по лемме 1 следует, что $\rho(\mathfrak{L}\mathcal{U}_\alpha)\le r_\alpha$, где r_α является единственным корнем уравнения $\omega(r)=1$ на интервале $(0,1)$, т. е. уравнения

$$\Psi(r,\alpha)=\frac{(1+r)^{(\alpha-1)}}{(1-r)^{(\alpha+1)}}=e. \tag{20}$$

Поскольку функция $\Psi(r,\alpha)$ возрастает при $\alpha \in [1,\infty)$, следует, что r_α убывает при увеличении α. Таким образом,

$$\rho(\mathfrak{L}\mathcal{U}_\alpha) \le r_\alpha \le r_1.$$

Поскольку (см. пример 1.7)

$$\rho(\mathfrak{L}\mathcal{U}_1) = \rho(\mathfrak{L}K) = 1 - \frac{1}{\sqrt{e}},$$

следовательно,

$$r_1 = 1 - \frac{1}{\sqrt{e}} = \rho(\mathfrak{L}\mathcal{U}_1).$$

Перепишем (20) в следующем виде:

$$\left(\frac{1+r}{1-r}\right)^{\alpha+1} = e(1+r)^2. \tag{21}$$

Для верхней оценки r_α заменим r в правой части уравнения (21) на $r_1 = 1 - \dfrac{1}{\sqrt{e}}$:

$$\left(\frac{1+r}{1-r}\right)^{\alpha+1} = e(1+r_1)^2. \tag{22}$$

Обозначим $r(\alpha)$ – единственное решение на интервале $(0,1)$ уравнения (22) для фиксированного α. Поскольку правая часть уравнения (21) для $r = r_\alpha$ меньше правой части (22), мы имеем

$$\left(\frac{1+r_\alpha}{1-r_\alpha}\right)^{\alpha+1} \le \left(\frac{1+r(\alpha)}{1-r(\alpha)}\right)^{\alpha+1}.$$

Теперь, поскольку левая часть уравнения (22) является возрастающей функцией от r, мы получаем неравенство $r_\alpha \le r(\alpha)$. Наконец, решая уравнение (22), находим

$$\frac{1+r}{1-r} = \left(e(1+r_1)^2\right)^{1/(\alpha+1)} \Leftrightarrow 1+r = \left(e(1+r_1)^2\right)^{1/(\alpha+1)} - r\cdot\left(e(1+r_1)^2\right)^{1/(\alpha+1)},$$

т. е.

$$r(\alpha) = \frac{\left[e(1+r_1)^2\right]^{1/(\alpha+1)} - 1}{\left[e(1+r_1)^2\right]^{1/(\alpha+1)} + 1} = \frac{\left[e\left(2 - \dfrac{1}{\sqrt{e}}\right)^2\right]^{1/(\alpha+1)} - 1}{\left[e\left(2 - \dfrac{1}{\sqrt{e}}\right)^2\right]^{1/(\alpha+1)} + 1} =$$

$$= \frac{\left[e\left(\dfrac{2\sqrt{e}-1}{\sqrt{e}}\right)^2\right]^{1/(\alpha+1)} - 1}{\left[e\left(\dfrac{2\sqrt{e}-1}{\sqrt{e}}\right)^2\right]^{1/(\alpha+1)} + 1} = \frac{(2\sqrt{e}-1)^{2/(\alpha+1)} - 1}{(2\sqrt{e}-1)^{2/(\alpha+1)} + 1}.$$

Таким образом,

$$\rho(\mathfrak{L}\mathcal{U}_\alpha) \le r_\alpha \le r(\alpha) = \frac{(2\sqrt{e}-1)^{2/(\alpha+1)} - 1}{(2\sqrt{e}-1)^{2/(\alpha+1)} + 1}.$$

Это завершает доказательство. □

В таблице 1.2 приведены некоторые значения $R_+(\alpha)$ и $r(\alpha)$ для натурального $\alpha \in [2, 10]$.

Таблица 1.2: Некоторые значения $R_+(\alpha)$ и $r(\alpha)$.

α	$R_+(\alpha)$	$r(\alpha)$
2	0.191920	0.270372
3	0.137639	0.205003
4	0.107632	0.164841
5	0.088451	0.137751
6	0.075102	0.118272
7	0.065266	0.103602
8	0.057714	0.092160
9	0.051732	0.082988
10	0.046875	0.075474
...	...	...

Замечание 1.5. В классе $\mathcal{M}$, указанном в лемме 1, могут быть известны точные оценки для коэффициентов Тейлора a_n в разложении функций из этого класса,

но равенство в этих оценках достигается для различных экстремальных функций для разных $n \in \mathbb{N}$. Используя такие оценки, можно получить только нижнюю границу для радиуса Бора в классе $\mathcal{M}$.

Глава 2.

Ограниченность обобщённого оператора Чезаро в линейно-инвариантных семействах аналитических в круге функций

2.1 Суммирование по Чезаро

Не каждый расходящийся числовой ряд можно просуммировать по Чезаро. Если ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ суммируем по Чезаро [11, с. 302], то

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = 0.$$

Пример 2.1. *Сумма ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}$ *по Чезаро равна* $1/2$.

Расходящийся числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}$ просуммировать по Чезаро можно. Частичные суммы этого ряда

$$s_n = \begin{cases} 0, & \text{при } n \text{ чётных;} \\ 1, & \text{при } n \text{ нечётных.} \end{cases}$$

Найдём предел среднеарифметических частичных сумм данного ряда:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{s_0 + s_1 + s_2 + \ldots + s_{n-1}}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n/2}{n} = \frac{1}{2}.$$

Следовательно, сумма ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}$ по Чезаро равна $1/2$.

Пример 2.1 интересен тем, что значение суммы этого расходящегося ряда 1/2 было известно уже в 1696 году. Он приведён в работе Я. Бернулли[27] [48] (см. также [40, «Вступительное слово», с. 18]. В своей работе Якоб Бернулли описывает интересный парадокс. Используя приём деления Н. Меркатора[28], описанного в работе [85] «Логарифмотехника: или новый, точный и простой метод построения логарифмов», из равенства

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots,$$

при $x = 1$, он получает парадоксальное значение

$$\frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots.$$

Пример 2.2. *Для расходящегося ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n$ *нельзя найти сумму по Чезаро, т. к.*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n} = 1.$$

2.2 Уточнение вида обобщённого оператора Чезаро для функций, принадлежащих линейно-инвариантным семействам

Уточним вид обобщённого оператора Чезаро (2) (из введения):

$$C^{\beta}[\psi](z) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{A_{n-1}^{\beta+1}} \sum_{k=1}^{n} A_{n-k}^{\beta} \xi_{k-1} \right) z^{n-1}$$

для аналитических функций в Δ, с целью получить не только классический вид оператора Чезаро для функций, имеющих разложение $f(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n z^n$, но и более точную оценку этого оператора.

---

[27] Якоб Бернулли (1655–1705).

[28] Николаус Меркатор (1620–1687).

Рассмотрим тождество:

$$\frac{z}{1-z}\cdot\frac{1}{(1-z)^{\beta}}=\frac{z}{(1-z)^{\beta+1}}. \tag{23}$$

Каждую из дробей в равенстве (23) раскладываем в ряд Тейлора:

$$\frac{z}{1-z}=\sum_{n=1}^{\infty}z^{n}.$$

Далее, используя известные разложения, имеем:

$$\frac{1}{(1-z)^{\beta}}=(1-z)^{-\beta}=1+\frac{(-\beta)}{1!}(-z)+\frac{(-\beta)(-\beta-1)}{2!}(-z)^{2}+\ldots$$

$$+\frac{(-\beta)(-\beta-1)\ldots(-\beta-(n-1))}{n!}(-z)^{n}+\ldots=$$

$$=1+\frac{\beta}{1!}z+\frac{\beta(\beta+1)}{2!}z^{2}+\ldots+\frac{\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n-1)}{n!}z^{n}+\ldots=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\beta)_{n}}{n!}z^{n}=\sum_{n=0}^{\infty}A_{n}^{\beta-1}z^{n}=\sum_{n=1}^{\infty}A_{n-1}^{\beta-1}z^{n-1}.$$

Аналогично раскладываем $\dfrac{z}{(1-z)^{\beta+1}}$:

$$\frac{z}{(1-z)^{\beta+1}}=z\sum_{n=1}^{\infty}A_{n-1}^{\beta}z^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}A_{n-1}^{\beta}z^{n}.$$

Таким образом, получено выражение, эквивалентное (23):

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}z^{n}\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty}A_{n-1}^{\beta-1}z^{n-1}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}A_{n-1}^{\beta}z^{n}. \tag{24}$$

Раскроем скобки левой части (24) и выполним группировку относительно z:

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}z^{n}\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty}A_{n-1}^{\beta-1}z^{n-1}\right)=$$

$$= z \cdot \sum_{n=1}^{\infty} A_{n-1}^{\beta-1} z^{n-1} + z^2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} A_{n-1}^{\beta-1} z^{n-1} + \ldots + z^n \cdot \sum_{n=1}^{\infty} A_{n-1}^{\beta-1} z^{n-1} \ldots =$$

$$= z \cdot \left(A_0^{\beta-1} + A_1^{\beta-1} z + A_2^{\beta-1} z^2 + A_3^{\beta-1} z^3 + \ldots + A_{n-1}^{\beta-1} z^{n-1} + \ldots \right) +$$

$$+ z^2 \cdot \left(A_0^{\beta-1} + A_1^{\beta-1} z + A_2^{\beta-1} z^2 + \ldots + A_{n-1}^{\beta-1} z^{n-1} + \ldots \right) +$$

$$\ldots$$

$$+ z^n \cdot \left(A_0^{\beta-1} + A_1^{\beta-1} z + A_2^{\beta-1} z^2 + \ldots + A_{n-1}^{\beta-1} z^{n-1} + \ldots \right) + \ldots =$$

Таким образом,

$$z \cdot A_0^{\beta-1} + z^2 \left(A_1^{\beta-1} + A_0^{\beta-1} \right) + z^3 \left(A_2^{\beta-1} + A_1^{\beta-1} + A_0^{\beta-1} \right) + \ldots$$

$$+ z^n \left(A_{n-1}^{\beta-1} + A_{n-2}^{\beta-1} + \ldots + A_0^{\beta-1} \right) + \ldots =$$

$$= z \cdot \sum_{n=0}^{0} A_n^{\beta-1} + z^2 \cdot \sum_{n=0}^{1} A_n^{\beta-1} + z^3 \cdot \sum_{n=0}^{2} A_n^{\beta-1} + \ldots + z^n \cdot \sum_{n=0}^{n-1} A_n^{\beta-1} + \ldots =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n-1} A_k^{\beta-1} \right) z^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} A_{k-1}^{\beta-1} \right) z^n.$$

Таким образом справедливо равенство:

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} z^n \right) \left(\sum_{n=1}^{\infty} A_{n-1}^{\beta-1} z^{n-1} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} A_{k-1}^{\beta-1} \right) z^n.$$

Так как

$$\sum_{k=1}^{n} A_{k-1}^{\beta-1} = \sum_{k=1}^{n} A_{n-k}^{\beta-1},$$

следовательно, (24) эквивалентно следующему равенству:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} A_{n-k}^{\beta-1} \right) z^n = \sum_{n=1}^{\infty} A_{n-1}^{\beta} z^n.$$

Далее приравниваем коэффициенты при z^n:

$$\sum_{k=1}^{n} A_{n-k}^{\beta-1} = A_{n-1}^{\beta}, \quad \text{т. е.} \quad \frac{1}{A_{n-1}^{\beta}} \sum_{k=1}^{n} A_{n-k}^{\beta-1} = 1.$$

Пусть $f(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ – аналитическая функция в Δ. Определяем оператор Чезаро порядка $\beta > 0$ следующим образом:

$$C^{\beta}[f](z) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{A_{n-1}^{\beta}} \sum_{k=1}^{n} A_{n-k}^{\beta-1} a_k \right) z^n. \tag{25}$$

Классический оператор Чезаро в (25) получается при $\beta = 1$:

$$C^{1}[f](z) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{A_{n-1}^{1}} \sum_{k=1}^{n} A_{n-k}^{0} a_k \right) z^n,$$

так как

$$A_{n-1}^{1} = \frac{(2)_{n-1}}{(1)_{n-1}} = \frac{2(2+1)\dots(2+n-1-1)}{(n-1)!} = n$$

и

$$A_{n-k}^{0} = \frac{(1)_{n-k}}{(1)_{n-k}} = 1.$$

Следовательно,

$$C^{1}[f](z) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k \right) z^n = a_1 z + \frac{a_1 + a_2}{2} z^2 + \frac{a_1 + a_2 + a_3}{3} z^3 + \dots.$$

Классический оператор Чезаро, действующий на аналитическую функцию, заменяет коэффициент a_n на среднеарифметическое

$$a_n \to \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}.$$

В действительности, разные порядки β создают новые правила замены коэффициентов. Рассмотрим один пример. Пусть теперь $\beta = 2$.

$$C^2[f](z) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{A^2_{n-1}} \sum_{k=1}^{n} A^1_{n-k} a_k \right) z^n.$$

Так как

$$A^2_{n-1} = \frac{(3)_{n-1}}{(1)_{n-1}} = \frac{3 \cdot 4 \cdot 5 \ldots (3+n-2)}{(n-1)!} = \frac{n(n+1)}{2}$$

и

$$A^1_{n-k} = \frac{(2)_{n-k}}{(1)_{n-k}} = \frac{2 \cdot 3 \ldots (2+n-k-1)}{(n-k)!} = n-k+1,$$

то

$$C^2[f](z) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{n} (n-k+1) a_k \right) z^n =$$

$$= a_1 z + \frac{1}{3}(2a_1 + a_2) z^2 + \frac{1}{6}(3a_1 + 2a_2 + a_3) z^3 + \ldots.$$

Во введении был описан оператор

$$T_g(f) = \int_0^z f(s) g'(s) ds,$$

изучением которого занимался Х. Поммеренке. В частности, была доказана его ограниченность [93]. Покажем, что если

$$g(z) = \log \left(\frac{1}{1-z} \right)$$

(ветвь логарифма главная), то оператор $T_g(f)$, применённый к функции $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \xi_n z^n$ является классическим оператором Чезаро. Действительно, пусть

$$T_g(f) = \int_0^z f(s) \left(\log \frac{1}{1-s} \right)' ds.$$

Так как

$$\left(\log \frac{1}{1-s} \right)' = (-\log(1-s))' = \frac{1}{1-s},$$

то имеем
$$\int_0^z f(s)\left(\log\frac{1}{1-s}\right)' ds = \int_0^z f(s)\frac{1}{1-s}ds =$$
$$= \int_0^z \left(\sum_{n=0}^{\infty}\xi_n s^n\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} s^k\right) ds =$$
$$= \int_0^z \left(\xi_0 + \xi_1 s + \ldots + \xi_k s^k + \ldots\right)\left(1 + s + s^2 + \ldots + s^k + \ldots\right) ds =$$
после группировки относительно s получится выражение:
$$= \int_0^z \Big(\xi_0 + s(\xi_0+\xi_1) + s^2(\xi_0+\xi_1+\xi_2) + \ldots + s^k(\xi_0+\xi_1+\ldots+\xi_k) + \ldots\Big)ds.$$
Интегрируем по s и приходим к тому, что
$$\int_0^z f(s)\left(\log\frac{1}{1-s}\right)' ds = \xi_0 z + \frac{\xi_0+\xi_1}{2}z^2 + \frac{\xi_0+\xi_1+\xi_2}{3}z^3 + \ldots$$
$$+\frac{\xi_0+\xi_1+\ldots+\xi_k}{k+1}z^{k+1} + \ldots = C[\psi](z) -$$
классический оператор Чезаро.

Переход к интегральному виду удобен при решении некоторых задач. Например, в [74, теорема 3] авторы использовали интегральное представление оператора Чезаро для получения его оценки.

2.3 Ограниченность обобщённого оператора Чезаро, действующего на функции из линейно-инвариантных семейств

Следующая теорема доказывает ограниченность оператора Чезаро в классе $\mathfrak{LU}_\alpha$.

Теорема 2.1. *Для любой функции $f(z) \in \mathfrak{LU}_\alpha$, $\alpha > 1$, $\beta > 0$, β – оператор Чезаро* *ограничен и*

$$|C^{\beta}[f](z)| \leq 2\alpha\beta r\Phi(r,1,\beta) + r^2 e\left(\alpha - \frac{1}{4\alpha}\right)\left(\frac{1}{1-r} - \beta\Phi(r,1,\beta+1)\right),$$

где $|z| = r$ *и* $\Phi(z,s,a) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{z^n}{(n+a)^s}$ *– трансцендентная функция Лерха.*

Доказательство. Для доказательства используем оценки коэффициентов в классе $\mathfrak{L}\mathcal{U}_{\alpha}$. Пусть

$$A_n(\alpha) = \sup_{f\in\mathfrak{L}\mathcal{U}_{\alpha}} |a_n(f)|,$$

для $\alpha > 1$ и $n \geq 2$ в классе $\mathfrak{L}\mathcal{U}_{\alpha}$ для $A_n(\alpha)$ выполнены неравенства [71] (см. также [34, с. 102], [104]):

$$A_n(\alpha) \leq \frac{2\left(\alpha - \dfrac{1}{\alpha}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^2\right)}{\left(2-\dfrac{1}{n}\right)\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{n-1}} \leq e\left(\alpha - \frac{1}{4\alpha}\right)$$

и

$$A_1(\alpha) = \sup_{f\in\mathfrak{L}\mathcal{U}_{\alpha}} |a_1(f)| \leq 2\alpha.$$

Обозначим $r = |z|$, $\beta > 0$. Докажем ограниченность обобщённого оператора Чезаро:

$$|C^{\beta}[f](z)| = \left|\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{A_{n-1}^{\beta}}\sum_{k=1}^{n}A_{n-k}^{\beta-1}a_k\right)z^n\right| =$$

$$= \left|\left(\frac{1}{A_0^{\beta}}\sum_{k=1}^{1}A_{1-k}^{\beta-1}a_k\right)z + \left(\frac{1}{A_1^{\beta}}\sum_{k=1}^{2}A_{2-k}^{\beta-1}a_k\right)z^2 + \ldots + \left(\frac{1}{A_{n-1}^{\beta}}\sum_{k=1}^{n}A_{n-k}^{\beta-1}a_k\right)z^n + \ldots\right| =$$

$$= \left|\frac{1}{A_0^{\beta}}A_0^{\beta-1}a_1 z + \frac{1}{A_1^{\beta}}\left(A_1^{\beta-1}a_1 + A_0^{\beta-1}a_2\right)z^2 + \ldots\right.$$

$$\left. + \frac{1}{A_{n-1}^{\beta}}\left(A_{n-1}^{\beta-1}a_1 + A_{n-2}^{\beta-1}a_2 + \ldots + A_0^{\beta-1}a_n\right)z^n + \ldots\right| =$$

$$= \left| a_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{A_{n-1}^{\beta}} A_{n-1}^{\beta-1} z^n + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{A_{n-1}^{\beta}} \sum_{k=2}^{n} A_{n-k}^{\beta-1} a_k \right) z^n \right| \leq$$

$$\leq |a_1| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{A_{n-1}^{\beta}} A_{n-1}^{\beta-1} r^n + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{A_{n-1}^{\beta}} \sum_{k=2}^{n} A_{n-k}^{\beta-1} |a_k| \right) r^n \leq$$

$$\leq 2\alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{A_{n-1}^{\beta}} A_{n-1}^{\beta-1} r^n + e\left(\alpha - \frac{1}{4\alpha}\right) \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{A_{n-1}^{\beta}} \sum_{k=2}^{n} A_{n-k}^{\beta-1} \right) r^n.$$

Так как для любого $\beta > 0$ и $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{A_{n-1}^{\beta-1}}{A_{n-1}^{\beta}} = \frac{(\beta)_{n-1}(1)_{n-1}}{(1)_{n-1}(\beta+1)_{n-1}} = \frac{\Gamma(\beta+n-1)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\beta+n)} =$$

$$= \frac{\Gamma(\beta+n-1)\beta\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta)(\beta+n-1)\Gamma(\beta+n-1)} = \frac{\beta}{(\beta+n-1)}$$

и

$$\frac{1}{A_{n-1}^{\beta}} \sum_{k=1}^{n} A_{n-k}^{\beta-1} = 1,$$

т. е.

$$\frac{1}{A_{n-1}^{\beta}} \cdot A_{n-1}^{\beta-1} + \frac{1}{A_{n-1}^{\beta}} \sum_{k=2}^{n} A_{n-k}^{\beta-1} = 1,$$

следовательно,

$$\frac{1}{A_{n-1}^{\beta}} \sum_{k=2}^{n} A_{n-k}^{\beta-1} = 1 - \frac{\beta}{(\beta+n-1)}.$$

Таким образом,

$$2\alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{A_{n-1}^{\beta}} A_{n-1}^{\beta-1} r^n + e\left(\alpha - \frac{1}{4\alpha}\right) \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{A_{n-1}^{\beta}} \sum_{k=2}^{n} A_{n-k}^{\beta-1} \right) r^n =$$

$$= 2\alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta}{(\beta+n-1)} r^n + e\left(\alpha - \frac{1}{4\alpha}\right) \sum_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{\beta}{(\beta+n-1)}\right) r^n.$$

Заметим, что для любого $\beta > 0$, $n \in \mathbb{N}$ и $\alpha > 1$ следующие неравенства верны:

$$\frac{\beta}{(\beta+n-1)} > 0, \quad \left(\alpha - \frac{1}{4\alpha}\right) > 0,$$

а также

$$\left(1 - \frac{\beta}{(\beta+n-1)}\right) \geq 0$$

так как $\dfrac{\beta}{(\beta+n-1)} \leq 1$.

Таким образом, на этом этапе оценки видно, что коэффициенты при r в суммах положительные для любого $\beta > 0$, $n \in \mathbb{N}$ и $\alpha > 1$.

Запишем ряды в виде функции Лерха:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta}{(\beta+n-1)} r^n = \beta \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{(\beta+n-1)} = \beta r \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n}{(\beta+n)} = \beta r \Phi(r,1,\beta)$$

и

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{\beta}{(\beta+n-1)}\right) r^n = \sum_{n=2}^{\infty} r^n - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\beta}{(\beta+n-1)} r^n =$$

$$= \frac{r^2}{1-r} - \beta \sum_{n=2}^{\infty} \frac{r^n}{(\beta+n-1)} = \frac{r^2}{1-r} - \beta r^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n}{(\beta+n+1)} =$$

$$= \frac{r^2}{1-r} - \beta r^2 \Phi(r,1,\beta+1),$$

следовательно, оператор Чезаро в классе $\mathfrak{LU}_\alpha$ ограничен и

$$|C^\beta[f](z)| \leq 2\alpha\beta r \Phi(r,1,\beta) + r^2 e \left(\alpha - \frac{1}{4\alpha}\right) \left(\frac{1}{1-r} - \beta \Phi(r,1,\beta+1)\right).$$

$\square$

Функция Лерха, которая возникает в данном исследовании, представляет самостоятельный интерес. Изучением свойств данной функции занимались многие математики, начиная с конца XIX века. Трансцендентную функцию

$$\Phi(z, s, a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n+a)^s}$$

ввёл Матиаш Лерх в 1887 году в [80] (см. также [44], [19]). Вопросы, связанные с историей возникновения и изучением свойств функции Лерха, подробно рассматриваются в статье [64]. Отмечу, что эта функция является обобщением дзета-функции Римана

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$$

(см, например труды Ю. В. Матиясевича [23], Э. Ч. Титчмарша [35]) и дзета-функции Гурвица

$$\zeta(s, \alpha) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(m+\alpha)^s}$$

(см., например, статью А. Лауринчикаса [18]).

Глава 3.

Аналоги классических теорем типа С. Н. Бернштейна и В. И. Смирнова для комплексных многочленов

3.1 Снятие ограничения на степени многочленов $f(z)$ и $F(z)$ в классических теоремах С. Н. Бернштейна и В. И. Смирнова

Далее в этой главе часто упоминаются теоремы B, C, D, E и F, формулировки этих теорем приведены во введении.

Теперь об основных результатах. Следующая теорема снимает некоторые ограничения на расположение нулей многочлена $F(z)$ из теоремы C.

Теорема 3.1. *Пусть $\rho \geq 1$ – фиксированное число; $f(z)$ и $F(z)$ – многочлены, удовлетворяющие условиям:*

1) $deg f \leq deg F = n$,

2) $z_1, \ldots, z_k$ – все нули многочлена F с учётом их кратности, лежащие в $\mathbb{C} \setminus \overline{\Delta}$, $1 \leq k \leq n$,

3) $|f(z)| \leq |F(z)|$ на $\partial\Delta$.

Тогда для любого $|z| \geq \rho \geq 1$ и $\tau \in \overline{D_{\rho,n}}$ справедливо неравенство:

$$|S_\tau[f](z)| \leq |S_\tau[Fq](z)|, \tag{26}$$

где S_τ – оператор Смирнова, $D_{\rho,n}$ – множество из теоремы C, $q(z) = \prod_{j=1}^{k} \frac{1 - \overline{z_j} z}{z - z_j}$.

Для $|z| \geq \rho > 1$ и $\tau \in D_{\rho,n}$ равенство в (26) достигается только для

$f(z) = e^{i\gamma} F(z) q(z)$, $\gamma \in \mathbb{R}$.

Преимущество теоремы 3.1 перед теоремой D не только в лаконичности формулировки и универсальности множества значений параметра τ – это множество не зависит от взаимного расположения точек z и z_j, $j = 1, \ldots, k$. Главное здесь – различие в условиях 3) $|f(z)| \le |F(z)|$: в теореме D предполагается выполнение этого неравенства в $\mathbb{C} \setminus \Delta$, а в теореме 3.1 – только на окружности $|z| = 1$, как в классическом случае теорем B и C. Это существенно расширяет возможности применения теоремы 3.1 по сравнению с теоремой D.

Сравним неравенства (9) (из теоремы D) и (26). Оба эти неравенства являются точными, как следует из формулировок теоремы D и теоремы 3.1. Для сравнения неравенств (9) и (26) мы должны взять упорядоченную пару многочленов $\{f, F\}$, удовлетворяющих условию теоремы D, и выяснить, какое из неравенств:

$$|S_\tau[f](z)| \le |S_\tau[F](z)| \quad \text{или} \quad |S_\tau[f](z)| \le |S_\tau[Fq](z)|$$

даёт лучший результат при одном и том же $\tau \in [D_{\rho,n} \cap D(\rho, k, n)] =: \mathrm{U}$, $\rho = |z|$, при фиксированном $\rho > 1$; заметим, что множество U всегда не пусто. Обозначим $F_1 = F(z)q(z)$, все нули многочлена F_1 лежат в $\overline{\Delta}$ и $|F_1(z)| = |F(z)|$ на $\partial\Delta$, т. к. на границе единичного круга

$$|q(z)| = |q(e^{it})| = \left| \prod_{z_j \in \Lambda_-} \frac{1 - \overline{z_j} e^{it}}{e^{it} - z_j} \right| = \prod_{z_j \in \Lambda_-} \left| \frac{1 - \overline{z_j} e^{it}}{e^{it}(1 - z_j e^{-it})} \right| = \prod_{z_j \in \Lambda_-} \left| \frac{1 - \overline{z_j} e^{it}}{\overline{1 - \overline{z_j} e^{it}}} \right| = 1,$$

$t \in \mathbb{R}$. Поэтому к паре многочленов $\{F, F_1\}$ применима теорема C, и

$$|S_\tau[F](z)| \le |S_\tau[F_1](z)| \quad \text{для} \quad |z| = \rho.$$

Равенство в последнем неравенстве не выполняется, т. к. в противном случае по теореме C должно выполняться равенство $F(z) = e^{i\gamma} F_1(z)$, $\gamma \in \mathbb{R}$, а это невозможно, поскольку $|q(z)| \ne 1$ для $|z| = \rho > 1$. Таким образом,

$$|S_\tau[f](z)| \le |S_\tau[F](z)| < |S_\tau[Fq](z)|.$$

То есть при выполнении условий теоремы D для пары многочленов $\{f, F\}$ неравенство (9) лучше неравенства (26). Однако, стоит отметить, что множество таких пар $\{f, F\}$, для которых выполнено условие 3) из теоремы D очень бедное по сравнению с множеством пар многочленов, для которых применима теорема 3.1.

Доказательство теоремы 3.1. Пусть

$$F_1(z) = F(z)q(z) = F(z)\prod_{j=1}^{k}\left(\frac{z-\frac{1}{\overline{z_j}}}{1-\frac{z}{z_j}}\cdot\frac{\overline{z_j}}{z_j}\right) = \sigma F(z)\prod_{j=1}^{k}\frac{z-\overline{a_j}}{1-a_j z},$$

где

$$\sigma = \prod_{j=1}^{k}\frac{\overline{z_j}}{z_j}, |\sigma| = 1, a_j = \frac{1}{z_j} \in \Delta, j = 1, \ldots, k.$$

Тогда из условия 2) теоремы следует, что F_1 – многочлен степени n, все его нули лежат в $\overline{\Delta}$ и $|f(z)| \leq |F_1(z)|$ на $\partial\Delta$. Следовательно, по теореме C, для любого $\tau \in \overline{D_{\rho,n}}$ имеем:

$$|S_\tau[f](z)| \leq |S_\tau[F_1](z)|,\ |z| \geq \rho, \tag{27}$$

т. е. выполнено неравенство (26). По теореме C для $|z| \geq \rho > 1$ и $\tau \in D_{\rho,n}$ равенство в (27) возможно только для $f(z) = e^{i\gamma}F_1(z) = e^{i\gamma}F(z)q(z)$, $\gamma \in \mathbb{R}$. Теорема доказана.

3.2 Приложения

Известно много дифференциальных неравенств для многочленов, полученных в предположении, что нули многочленов лежат в круге $\overline{\Delta}$ или в $\mathbb{C}\setminus\Delta$. Применение простого приёма, использованного в доказательстве теоремы 3.1, позволяет снять ограничение на нули многочленов в таких дифференциальных неравенствах и получить точные обобщения. Рассмотрим несколько примеров.

1. В [58, теорема 1] для многочленов $F(z)$ степени n, у которых все нули лежат в Δ, доказано неравенство:

$$\min_{|z|=1}\left|zF'(z) + \frac{n\beta}{2}F(z)\right| \geq n\left|1+\frac{\beta}{2}\right|\min_{|z|=1}|F(z)| \tag{28}$$

для любого $\beta \in \overline{\Delta}$. Неравенство точное, равенство достигается для $F(z) = \mu z^n$, $\mu \in \mathbb{C}$.

Замечание 3.1. Заметим, что неравенство (28) остаётся справедливым, если все нули многочлена $F(z)$ лежат в $\overline{\Delta}$. Это следует из возможности равномерного приближения в $\overline{\Delta}$ многочлена $F(z)$ последовательностью многочленов F_j, $\deg F_j = \deg F$, у которых все нули лежат в Δ.

Этот результат был доказан в 1951 году С. Н. Мергеляном[29], он даёт ответ на вопрос о возможности равномерного приближения аналитической функции в заданной области последовательностью многочленов [26, с. 44] (см. также [32, с. 117]): *Пусть $\mathbb{K}$ – компакт в $\overline{\mathbb{C}}$. На $\mathbb{K}$ задана непрерывная функция $F(z)$, аналитическая в каждой точке $z \in int\mathbb{K}$. Тогда ряд, составленный из последовательности многочленов $\{F_j(z)\}$, $j \in \mathbb{N}$, имеющих нули в $int\mathbb{K}$, равномерно сходящийся к $F(z)$, существует тогда и только тогда, когда $\mathbb{C} \setminus \mathbb{K}$ – связное множество, содержащее бесконечно удалённую точку.*

Равномерная сходимость последовательности многочленов $\{F_j(z)\}$ к функции $F(z)$ означает выполнение равенства:

$$\lim_{j\to\infty} \sup_{z\in\mathbb{K}} |F(z) - F_j(z)| = 0.$$

Освобождаясь от ограничения на нули многочлена $F(z)$, из приведённого неравенства (28) получим

Предложение 1. *Пусть $F(z)$ – произвольный многочлен степени n; обозначим $\Lambda = \{z_1, \ldots, z_k\} \neq \varnothing$ – множество всех нулей многочлена $F(z)$ с учётом их кратности, лежащих в $\mathbb{C} \setminus \Delta$, и $q(z) = \prod\limits_{z_j\in\Lambda} \dfrac{1 - \overline{z_j} z}{z - z_j}$. Тогда для любого $\beta \in \overline{\Delta}$*

$$\min_{|z|=1} \left| z(F(z)q(z))' + \frac{n\beta}{2} F(z)q(z) \right| \geq n \left| 1 + \frac{\beta}{2} \right| \min_{|z|=1} |F(z)|. \tag{29}$$

Равенство в (29) достигается для многочленов $c(z - e^{i\gamma})^n$, $\gamma \in \mathbb{R}$, $c = const \neq 0$, при $n \geq 2$ – для любого $\beta \in \overline{\Delta}$; а при $n = 1$ – для $\beta = -1$.

[29] Сергей Никитович Мергелян (1928–2008).

Доказательство. При сделанных предположениях $F_1(z) := F(z)q(z)$ – многочлен все нули которого лежат в $\overline{\Delta}$. Следовательно, с учётом замечания 3.1, F_1 удовлетворяет неравенству (28).

$$\min_{|z|=1}\left|zF_1'(z)+\frac{n\beta}{2}F_1(z)\right| \geq n\left|1+\frac{\beta}{2}\right|\min_{|z|=1}|F_1(z)| \quad \forall\beta\in\overline{\Delta}.$$

Но, $|q(z)|\equiv 1$ на $\partial\Delta$, поэтому

$$n\left|1+\frac{\beta}{2}\right|\min_{|z|=1}|F_1(z)| = n\left|1+\frac{\beta}{2}\right|\min_{|z|=1}|F(z)|,$$

следовательно,

$$\min_{|z|=1}\left|zF_1'(z)+\frac{n\beta}{2}F_1(z)\right| \geq n\left|1+\frac{\beta}{2}\right|\min_{|z|=1}|F(z)|$$

получили (29).

Докажем утверждение о знаке равенства в (29). Рассмотрим многочлен $f(z) = c(z-e^{i\gamma})^n$, $\gamma\in\mathbb{R}$, $c = const \neq 0$, $\deg f(z) = n$. Множество Λ состоит из n одинаковых нулей $z = e^{i\gamma}$, лежащих на границе единичного круга $\partial\Delta$, следовательно, функция $q(z)$ имеет вид:

$$q(z) = \prod_{z_j\in\Lambda}\frac{1-e^{-i\gamma}z}{z-e^{i\gamma}} = \left(\frac{1-e^{-i\gamma}z}{z-e^{i\gamma}}\right)^n.$$

Запишем неравенство (29) для многочлена $f(z) = c(z-e^{i\gamma})^n$, $\gamma\in\mathbb{R}$:

$$\min_{|z|=1}\left|z\left(c(z-e^{i\gamma})^n\left(\frac{1-e^{-i\gamma}z}{z-e^{i\gamma}}\right)^n\right)' + \frac{n\beta}{2}c(z-e^{i\gamma})^n\left(\frac{1-e^{-i\gamma}z}{z-e^{i\gamma}}\right)^n\right| \geq$$

$$\geq n\cdot\left|1+\frac{\beta}{2}\right|\min_{|z|=1}|c(z-e^{i\gamma})^n| = n\cdot|c|\cdot\left|1+\frac{\beta}{2}\right|\min_{|z|=1}|(z-e^{i\gamma})^n|.$$

Заметим, что минимум правой части при $|z|=1$ равен нулю. Упростим левую часть последнего неравенства и покажем, что минимум этой части также принимает значение нуль.

$$\min_{|z|=1}\left|z\left(c\left(1-e^{-i\gamma}z\right)^{n}\right)'+\frac{n\beta}{2}c\left(1-e^{-i\gamma}z\right)^{n}\right|=$$

$$=\min_{|z|=1}\left|z\left(c\cdot n(-e^{i\gamma})\left(1-e^{-i\gamma}z\right)^{n-1}\right)+\frac{n\beta}{2}c\left(1-e^{-i\gamma}z\right)^{n}\right|=$$

$$=\min_{|z|=1}\left|c\cdot n\left(1-e^{-i\gamma}z\right)^{n-1}\left(z(-e^{i\gamma})+\frac{\beta}{2}\left(1-e^{-i\gamma}z\right)\right)\right|=$$

$$=|c|\cdot n\cdot\min_{|z|=1}\left(\left|\left(1-e^{-i\gamma}z\right)^{n-1}\right|\left|z(-e^{i\gamma})+\frac{\beta}{2}\left(1-e^{-i\gamma}z\right)\right|\right)$$

Так как минимум берется по всем $z\in\partial\Delta$, то минимум

$$|c|\cdot n\cdot\min_{|z|=1}\left(\left|\left(1-e^{-i\gamma}z\right)^{n-1}\right|\left|z(-e^{i\gamma})+\frac{\beta}{2}\left(1-e^{-i\gamma}z\right)\right|\right)=0$$

для $\beta\in\Delta$ и $n>1$.

Пусть $n=1$. Обозначим $h(z):=z(-e^{i\gamma})+\frac{\beta}{2}\left(1-e^{-i\gamma}z\right)$. Тогда для того, чтобы в левой части неравенства был нуль, необходимо, чтобы $h(z)=0$. Отсюда следует, что

$$-ze^{i\gamma}+\frac{\beta}{2}-\frac{\beta}{2}e^{-i\gamma}z=0,\quad\text{т. е.}\quad z=\frac{\beta/2}{e^{i\gamma}+\frac{\beta}{2}e^{-i\gamma}}.$$

Так как $|z|=1$, то

$$\left|\frac{\beta/2}{e^{i\gamma}+\frac{\beta}{2}e^{-i\gamma}}\right|=\left|\frac{\beta}{2e^{i\gamma}+\beta e^{-i\gamma}}\right|=\left|\frac{\beta}{2e^{2i\gamma}+\beta}\right|=1.$$

Зафиксируем γ, пусть $\gamma=0$. Тогда,

$$\left|\frac{\beta}{2+\beta}\right|=1\Leftrightarrow|\beta|=|2+\beta|\Leftrightarrow\beta=-1.$$

Таким образом, многочлен $f(z)=c(z-e^{i\gamma})^n$, $\gamma\in\mathbb{R}$ обращает неравенство (29) в тождество при $n\geq 2$ – для любого $\beta\in\overline{\Delta}$; а при $n=1$ – для $\beta=-1$. $\square$

2. Также в [58, теорема 2] для многочленов $F(z)$ степени n, у которых все нули лежат в $\mathbb{C} \setminus \Delta$, получено точное неравенство при любых $\beta \in \overline{\Delta}$ и $|z| = 1$:

$$\left| zF'(z) + \frac{n\beta}{2} F(z) \right| \leq \tag{30}$$

$$\leq \frac{n}{2} \left[\left(\left| 1 + \frac{\beta}{2} \right| + \left| \frac{\beta}{2} \right| \right) \max_{|z|=1} |F(z)| - \left(\left| 1 + \frac{\beta}{2} \right| - \left| \frac{\beta}{2} \right| \right) \min_{|z|=1} |F(z)| \right];$$

равенство в (30) достигается для многочленов $F(z) = a + bz^n$, где $|a| = |b| = 1/2$. В частности, при $\beta = 0$ и тех же ограничениях на многочлен $F(z)$, что и в неравенстве (30), получается известный результат А. Азиза и К. М. Давуда [46]:

$$|F'(z)| \leq \frac{n}{2} \left(\max_{|z|=1} |F(z)| - \min_{|z|=1} |F(z)| \right) \quad \forall z \in \partial\Delta. \tag{31}$$

Используя все тот же приём из доказательства теоремы 3.1, получим соответствующее утверждение для любых многочленов $F(z)$.

Предложение 2. *Пусть $F(z)$ – произвольный многочлен степени n. Обозначим Λ_- – множество всех нулей этого многочлена с учётом их кратности, лежащих в Δ, пусть $s \in [0, n]$ – порядок нуля многочлена $F(z)$ в точке $z = 0$. Если $\Lambda_- = \{z_1, \ldots, z_k\} \neq \varnothing$, обозначим $q(z) = \prod\limits_{z_j \in \Lambda_-} \dfrac{1 - \overline{z_j} z}{z - z_j}$; если $\Lambda_- = \varnothing$, положим $q(z) \equiv 1$. Тогда для любого $\beta \in \overline{\Delta}$ и $|z| = 1$*

$$\left| z(F(z)q(z))' + \frac{(n-s)\beta}{2} F(z)q(z) \right| \leq \tag{32}$$

$$\leq \frac{n-s}{2} \left[\left(\left| 1 + \frac{\beta}{2} \right| + \left| \frac{\beta}{2} \right| \right) \max_{|z|=1} |F(z)| - \left(\left| 1 + \frac{\beta}{2} \right| - \left| \frac{\beta}{2} \right| \right) \min_{|z|=1} |F(z)| \right].$$

Неравенство (32) точное, при $\Lambda_- \neq \varnothing$ равенство достигается для $F(z) = cz^n$, $c = const \neq 0$.

Доказательство. В случае $\Lambda_- = \varnothing$ неравенство (32) идентично (30). Если $\Lambda_- \neq \varnothing$, то многочлен $F(z)$ можно представить в виде произведения z^s и многочлена $\mathcal{F}(z)$, имеющего нули $z_j \neq 0$ ($j = 1, 2, \ldots n - s$), степень которого равна

$(n-s)$. Рассмотрим новый многочлен $F_1(z) = F(z)q(z)$. Так как $F(z)$ содержит множитель z^s, то функция $q(z)$ будет содержать множитель $1/z^s$, отсюда вытекает, что многочлен $F_1(z)$ – это многочлен степени $(n-s)$. Все нули многочлена $F_1(z)$ лежат в $\mathbb{C} \setminus \Delta$. Поэтому к F_1 применимо неравенство (30), из которого следует (32), поскольку $|q(z)| \equiv 1$ на $\partial\Delta$.

Следует заметить, что многочлен $F(z) = cz^n$ степени n, нули которого лежат в Δ, обращает неравенство (32) в тождество. Действительно, корень этого многочлена $z = 0$ – нуль n-го порядка, отсюда следует, что порядок нуля многочлена $F(z)$ в нуле равен n, функция $q(z) = \prod\limits_{z_j \in \Lambda_-} 1/z_j = 1/z^n$, и, как следствие, $F(z)q(z) = c$. Таким образом, (32) обращается в тождество для любого $\beta \in \overline{\Delta}$ и для $z \in \partial\Delta$ при $F(z) = cz^n$, $c = const \neq 0$. $\square$

Следствие 2. *В обозначениях предложения 2 из неравенства (32) при* $\beta = 0$ *получаем аналог неравенства (31):*

$$|(F(z)q(z))'| \leq \frac{(n-s)}{2} \left(\max_{|z|=1} |F(z)| - \min_{|z|=1} |F(z)| \right)$$

для $|z| = 1$ *и для произвольного многочлена* $F(z)$.

3. Для многочлена $F(z)$ при $0 < p < \infty$ обозначаем

$$||F||_p = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |F(e^{it})|^p dt \right)^{1/p}, \quad ||F||_0 = \exp\left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |F(e^{it})| dt \right).$$

Р. П. Боас и К. И. Рахман [51] доказали для многочленов $F(z)$ степени n, все нули которых лежат в $\mathbb{C} \setminus \Delta$, следующее неравенство:

$$||F(Rz)||_p \leq \frac{||z + R^n||_p}{||z+1||_p} ||F(z)||_p \quad \text{для} \quad R > 1 \quad \text{и для} \quad p \geq 1. \tag{33}$$

Неравенство (33) точное, оно обращается в равенство, если $F(z) = az^n + b$, $|a| = |b|$. Позже К. И. Рахман и Г. Шмайссер [94] доказали справедливость этого утверждения и для $p \in [0; 1)$.

Опять используем приём из доказательсва теоремы 3.1, получим аналог неравенства (33) для произвольных многочленов $F(z)$ без ограничения на расположение нулей многочленов.

Предложение 3. *Для произвольного многочлена $F(z)$ обозначим Λ_- – множество всех нулей этого многочлена с учётом их кратности, лежащих в Δ, пусть $s \in [0, n]$ – порядок нуля многочлена $F(z)$ в точке $z = 0$. Если $\Lambda_- = \{z_1, \dots, z_k\} \neq \varnothing$, обозначим $q(z) = \prod\limits_{z_j \in \Lambda_-} \frac{1 - \overline{z_j} z}{z - z_j}$; если $\Lambda_- = \varnothing$, положим $q(z) \equiv 1$. Тогда для $p \geq 0$ и для $R > 1$*

$$||F(Rz)q(Rz)||_p \leq \frac{||z + R^{n-s}||_p}{||z+1||_p} ||F(z)||_p. \tag{34}$$

Неравенство точное, равенство в (34) получаем для $F(z) = cz^n$, $c = const \neq 0$.

Доказательство. Если $\Lambda_- = \varnothing$, то неравенство (34) совпадает с неравенством (33). Если $\Lambda_- \neq \varnothing$, то $F_1(z) = F(z)q(z)$ – многочлен степени $(n - s)$ и все его нули лежат в $\mathbb{C} \setminus \Delta$. Поэтому к многочлену F_1 применимо неравенство (33) для $p \in [0, \infty)$:

$$||F_1(Rz)||_p = ||F(Rz)q(Rz)||_p \leq \frac{||z + R^{n-s}||_p}{||z+1||_p} ||F(z)q(z)||_p.$$

Так как $|q(e^{it})| \equiv 1$, то для $p > 0$

$$||F(z)q(z)||_p = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |F(e^{it})q(e^{it})|^p dt \right)^{1/p} = ||F(z)||_p$$

и

$$||F(z)q(z)||_0 = \exp\left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log|F(e^{it})q(e^{it})| dt \right) = ||F(z)||_0.$$

Следовательно,

$$\frac{||z + R^{n-s}||_p}{||z+1||_p} ||F(z)q(z)||_p = \frac{||z + R^{n-s}||_p}{||z+1||_p} ||F(z)||_p, \quad R > 1.$$

Таким образом, получаем неравенство (34).

Многочлен $F(z) = cz^n$, $c = const \neq 0$ обращает неравенство (34) в тождество. В силу того, что порядок нуля многочлена $F(z)$ в нуле равен n, следовательно, $s = n$. Функция $q(z) = 1/z^n$, отсюда следует, что $F(z)q(z) = c$. При $0 < p < \infty$

$$||z^n||_p = \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |e^{int}|^p dt\right)^{1/p} = \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} dt\right)^{1/p} = 1,$$

и при $p = 0$, $k \in \mathbb{Z}$, тоже:

$$||z^n||_0 = \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|e^{int}|dt\right) = \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log 1 dt\right) =$$

$$\exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} 2\pi k i dt\right) = \exp(2\pi k i) = 1.$$

Следовательно

$$||c||_p \leq \frac{||z+1||_p}{||z+1||_p}||cz^n||_p = ||cz^n||_p = ||c||_p,$$

утверждение о знаке равенства доказано. □

3.3 Снятие ограничения на степени многочленов $f(z)$ и $F(z)$ и расширение локализации нулей многочлена $F(z)$ из теоремы В. И. Смирнова

Следующая теорема снимает ограничения на степени многочленов $f(z)$ и $F(z)$ и некоторое ограничение на расположение нулей многочлена $F(z)$.

Теорема 3.2. *Пусть $\rho \geq 1$ – фиксированное число. Пусть $f(z)$ и $F(z)$ – произвольные многочлены степеней m и n соответственно, для которых на границе единичного круга $\partial\Delta$ справедливо неравенство $|f(z)| \leq |F(z)|$. Множество $D_{\rho,n}$ изменения параметра τ – как в теореме 3.1. Пусть $\Lambda = \{z_1, \dots, z_k\}$ – множество всех нулей многочлена $F(z)$ с учётом их кратности, лежащих в $\mathbb{C} \setminus \overline{\Delta}$; $q(z)$ из теоремы 3.1, если $\Lambda = \varnothing$, то полагаем $q(z) \equiv 1$. Тогда для $|z| \geq \rho \geq 1$*

справедливы неравенства:

$$|zf'(z) - m\tau f(z)| \le |z|^l |z(F(z)q(z))' - (\tau - l)F(z)q(z)|, \tag{35}$$

для $\tau \in \overline{D_{\rho,m}}$, *если* $l = m - n > 0$;

$$|zf'(z) - n\tau f(z)| \le |z(F(z)q(z))' - \tau F(z)q(z)| \tag{36}$$

для $\tau \in \overline{D_{\rho,n}}$, *если* $m \le n$.

Для $|z| \ge \rho > 1$ *и* $\tau \in D_{\rho,m}$ *равенство в (35) достигается только для многочленов* $f(z) = e^{i\gamma} z^l F(z)q(z)$. *Для* $|z| \ge \rho > 1$ *и* $\tau \in D_{\rho,n}$ *равенство в (36) достигается только для многочленов* $f(z) = e^{i\gamma}F(z)q(z)$, $\gamma \in \mathbb{R}$.

Доказательство. В случае $m \le n$ и $\Lambda = \varnothing$, утверждение теоремы 3.2 совпадает с утверждением теоремы С. Если $m \le n$ и $\Lambda \ne \varnothing$, то выполнены условия теоремы 3.1, включая утверждение о знаке равенства. Таким образом, получается неравенство (36).

Пусть теперь $m > n$. Рассмотрим новый многочлен $F_2(z) = z^l F(z)$, степень этого многочлена $\deg F_2 = m$ и на границе единичного круга $\partial\Delta$ выполнено неравенство $|f(z)| \le |F_2(z)|$. Тогда к паре многочленов $\{f, F_2\}$ применима теорема 3.1. Следовательно, для любого $|z| \ge \rho \ge 1$ и для любого $\tau \in \overline{D_{\rho,n}}$ получим

$$|S_\tau[f](z)| \le |S_\tau[F_2 q](z)|,$$

т. е.

$$|zf'(z) - \tau f(z)| \le |z(z^l F(z)q(z))' - \tau z^l F(z)q(z)| =$$

$$= |z(lz^{l-1}F(z)q(z) + z^l(F(z)q(z))') - \tau z^l F(z)q(z)| =$$

$$= |lz^l F(z)q(z) + z^{l+1}(F(z)q(z))' - \tau z^l F(z)q(z)| =$$

$$= |z|^l |z(F(z)q(z))' - (\tau - l)F(z)q(z)|.$$

При этом, как следует из формулировки теоремы 3.1, для $\tau \in D_{\rho,n}$ и $|z| \ge \rho > 1$, равенство в (35) достигается только для $f = e^{i\gamma}F_2(z)q(z)$, т. е. $f(z) = e^{i\gamma} z^l F(z)q(z)$, $\gamma \in \mathbb{R}$.

□

Далее потребуются некоторые обозначения и утверждения, касающиеся выпуклых множеств (подробнее см. [29], [30], [37]).

Рассмотрим прямую $l \subset \mathbb{C}$. Эта прямая разделяет комплексную плоскость $\mathbb{C}$ на две замкнутые полуплоскости D_1 и D_2, $\mathbb{C} = D_1 \cup D_2$, $\partial D_1 = \partial D_2 = l$. Возьмем множество B в $\mathbb{C}$ и точку $c \in \partial B$.

Определение 4. [30, с. 115] Прямая l называется *опорной прямой* к множеству B в точке c, если $c \in l$ и множество B лежит в одном из множеств D_1 или D_2.

Известно, что если В – выпуклое множество, то для всех $c \in \partial B$ существует опорная прямая к B в точке c [29, с. 83, теорема 1.9.2]. Прямая l разделяет два множества A и B в $\mathbb{C}$, если A – подмножество D_1, B – подмножество D_2.

Следующая теорема дополняет теорему F.

Теорема 3.3. *Пусть $E \subset \mathbb{C}$ – компактное множество, $B = \operatorname{conv} E$ – выпуклая оболочка множества E. Рассмотрим многочлены $f(z)$ и $F(z)$, удовлетворяющие условиям:*
1) $\deg f \leq \deg F = n$,
2) *F имеет все свои нули в E,*
3) *$|f(z)| \leq |F(z)|$ на ∂E.*
Зафиксируем точку $z \notin B$. Рассмотрим опорную прямую l к B, $z \notin l$, разделяющую B и z (см. рисунок 3.1). Возьмём круг $\Delta(v_z, R_z)$, $v_z \neq z$, такой что $\Delta(v_z, R_z) \cap l = \varnothing$, $z \in \Delta(v_z, R_z)$, и отрезок $[z, v_z]$ ортогонален l. Тогда

$$|(z - v_z)f'(z) - \tau_1 f(z)| \leq |(z - v_z)F'(z) - \tau_1 F(z)|, \tag{37}$$

для любого $\tau_1 \in \overline{D^*_{\rho_1, n}}$, где $\rho_1 = \dfrac{|z - v_z|}{R_z}$.

Для $\tau_1 \in D^*_{\rho_1, n}$ в (37) равенство выполняется только если $f(z) = e^{i\gamma}F(z)$, $\gamma \in \mathbb{R}$.

Замечание 3.2. Для всех пар многочленов $\{f, F\}$ из теоремы 3.3, для фиксированных z, v_z, R_z из теоремы 3.3 и w_0 из теоремы F, неравенства (11) (из теоремы F)

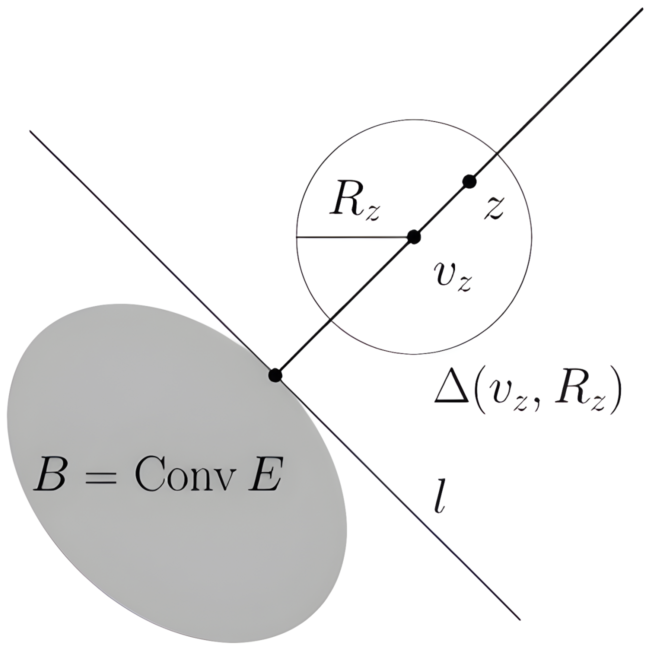

Рис. 3.1: К теореме 3.3.

и (37) не являются следствиями друг друга. Это означает, что не существует $\lambda \in \mathbb{C}$ такого, что

$$\lambda(z - w_0) = z - v_z \quad \text{и} \quad \lambda\Omega \subset \overline{D^*_{\rho_1, n}} \tag{38}$$

(где Ω — множество из теоремы F, см. рисунок 3.2) и не существует $\mu \in \mathbb{C}$ такого, что

$$\mu(z - v_z) = z - w_0 \quad \text{и} \quad \mu\overline{D^*_{\rho_1, n}} \subset \Omega. \tag{39}$$

Действительно, включение $\lambda\Omega \subset \overline{D^*_{\rho_1, n}}$ не выполняется, поскольку $0 \in \Omega$ (рисунок 3.2), но $0 \notin \overline{D^*_{\rho_1, n}}$. Следовательно, для всех λ существует окрестность $\mathcal{U}_\lambda$ точки $z = 0$ такая, что $\mathcal{U}_\lambda \not\subset \overline{D^*_{\rho_1, n}}$. Таким образом, (38) не выполняется для всех $\lambda \in \mathbb{C}$.

По условиям теоремы F, $B \ni w_0 \neq z \notin B$. Следовательно, если равенство (39) верно, то $\mu \neq 0$. Рассмотрим множество

$$\mathbb{C} \setminus \Delta\left(0, \, \frac{n\rho_1}{1 - \rho_1}\right) = \bigcup_{\theta \in [\theta_1, \theta_1 + 2\pi]} l_\theta, \quad \text{где} \quad l_\theta = \left\{se^{i\theta}, s \in \left[\frac{n\rho_1}{1 - \rho_1}, \infty\right)\right\},$$

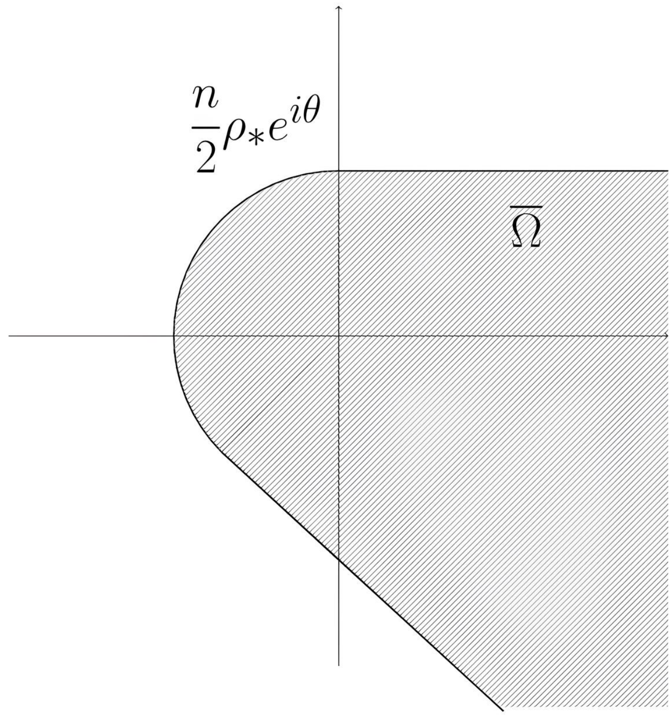

Рис. 3.2: Множество изменения параметра из теоремы F.

θ_1 — константа из теоремы F. Очевидно, что

$$\mathbb{C} \setminus \Delta\big(0,\ \frac{n\rho_1}{1-\rho_1}\big) \subset \overline{D^*_{\rho_1,\,n}}.$$

Поскольку Ω не содержит лучей

$$L_\theta = \big\{se^{i\theta} : s \in \big(\frac{n\rho_*}{2}, +\infty\big)\big\}$$

для $\theta \in (\theta_1, \theta_2)$, то Ω не содержит области $\bigcup\limits_{\theta\in(\theta_1,\theta_2)} L_\theta$. Следовательно, для всех $\mu \neq 0$ и достаточно больших $T \geq 1$ множество

$$\big\{\tau_1 \in \mathbb{C} : |\tau_1| > T|\mu|\frac{n\rho_*}{2}, \arg\tau_1 \in (\theta_1, \theta_2)\big\}$$

является подобластью $\mu D^*_{\rho_1,\,n}$, но не пересекает Ω.

Следовательно, теорема F и теорема 3.3 дополняют друг друга.

Доказательство теоремы 3.3. Согласно условию 2) теоремы 3.3 все нули $F(z)$ лежат в $\mathbb{C} \setminus \Delta(v_z, R_z)$. Согласно условиям 1), 3) и принципу максимума модуля справедливо неравенство $|f(z)| \le |F(z)|$ для всех $z \in \mathbb{C} \setminus B$. В частности, последнее неравенство выполняется на $\partial\Delta(v_z, R_z)$. Применима теорема E. По теореме E, применённой к многочленам $f(z)$ и $F(z)$, неравенство (10) (из теоремы E) принимает вид

$$|(\zeta - v_z)f'(z) - \tau_1 f(z)| \le |(\zeta - v_z)F'(z) - \tau_1 F(z)|, \tag{40}$$

для всех $\zeta \in \overline{\Delta(v_z, R_z)}$ таких, что $|\zeta - v_z| \le R_z\rho_1$ для фиксированного $\rho_1 \in (0,1)$ и всех $\tau_1 \in \overline{D^*_{\rho_1,n}}$. В частности, (40) выполняется для $\zeta = z$, где z – точка из формулировки теоремы 3.3 с $\rho_1 = \dfrac{|z - v_z|}{R_z}$.

По теореме E, для $\zeta = z$, $|z - v_z| = R_z\rho_1$, $\rho_1 < 1$ и $\tau_1 \in D^*_{\rho_1,n}$, в (40) равенство выполняется только в случае $f(z) = e^{i\gamma}F(z)$, $\gamma \in \mathbb{R}$. $\square$

3.4 Некоторое замечание

Замечание 3.3. Условие «*3)* $|f(z)| \le |F(z)|$ *для* $z \in \mathbb{C} \setminus \Delta$» в теореме D существенно более жёсткое, чем условие «*3)* $|f(z)| \le |F(z)|$ *для* $z \in \partial\Delta$» в теоремах B и C. Но, если для многочленов $f(z)$ и $F(z)$ выполнены условия $(*)$ (из теоремы B), то условия 3) в теоремах B, C, D – эквивалентны.

Действительно, пусть $f(z) = \sum\limits_{j=0}^{k} a_j z^j$ и $F(z) = \sum\limits_{j=0}^{n} b_j z^j$ – многочлены степеней k и n, соответственно, $k \le n$. Пусть все нули многочлена $F(z)$ лежат в круге Δ. Рассмотрим функцию $\Phi(z) = \dfrac{f(z)}{F(z)}$ – аналитическую в $\mathbb{C} \setminus \Delta$. На границе $\partial\Delta$ единичного круга выполнено неравенство: $\left|\dfrac{f(z)}{F(z)}\right| \le 1$. Тогда по принципу максимума модуля аналитичной функции

$$\max_{z \in \mathbb{C} \setminus \Delta} |\Phi(z)| \le 1.$$

Таким образом, из выполнения условий 2) и 3) в $(*)$ в теоремах B и C следует условие 3) из теоремы D. Следовательно, если для пары многочленов $\{f, F\}$ выполнено условие $(*)$, то по принципу максимума модуля, для этой пары $\{f, F\}$

условия 3) в теоремах B, C, D – эквивалентны.

3.5 О связи оператора В. И. Смирнова с полярной производной

Далее покажем как между собой связаны оператор Смирнова и полярная производная.

Определение 5. [83, с. 44](см. также [95, с. 97]) Полярной производной многочлена $f(z)$ степени n относительно полюса b называется

$$D_b[f](z) := (b - z)f'(z) + nf(z).$$

В 2019 году Е. Г. Компанеец и В. В. Старков [63] в связи со своими исследованиями ввели модифицированный оператор Смирнова $\tilde{S}_\tau[f](z)$ для многочленов степени n, определяемый следующим равенством:

$$\tilde{S}_\tau[f](z) = (1 + az)f'(z) - af(z),$$

где a – произвольное число, $a \in \overline{\Delta}$.

Замечание 3.4. Оператор $\tilde{S}_\tau[f](z)$ связан с оператором Смирнова $S_\tau[f](z)$ следующим образом:

$$\tilde{S}_\tau[f](z) = \frac{1 + az}{z} \cdot S_\tau[f](z),$$

если в $S_\tau[f](z)$ положить $\tau = \dfrac{naz}{1 + az}$, $a \in \overline{\Delta}$.

Действительно, рассмотрим оператор Смирнова, действующий на многочлен $f(z)$ степени n, с $\tau = \dfrac{naz}{1 + az}$, $a \in \overline{\Delta}$:

$$S_\tau[f](z) = zf'(z) - \frac{naz}{1 + az}f(z), \quad a \in \overline{\Delta}. \tag{41}$$

Умножим обе части равенства (41) на $\dfrac{1 + az}{z}$:

$$\frac{1+az}{z} \cdot S_\tau[f](z) = \frac{1+az}{z} \cdot \left(zf'(z) - \frac{naz}{1+az} f(z) \right). \tag{42}$$

Обозначим левую часть последнего равенства

$$\tilde{S}_\tau[f](z) := \frac{1+az}{z} \cdot S_\tau[f](z)$$

и после преобразования правой части (42), получим модифицированный оператор Смирнова:

$$\tilde{S}_\tau[f](z) = (1+az)f'(z) - naf(z). \tag{43}$$

Замечание 3.5. Полярная производная $D_b[f](z) = -\dfrac{1}{a}\tilde{S}_\tau[f](z)$ при $b = (-1/a)$, $a \in \overline{\Delta}$.

Действительно, умножим обе части равенства (43) на $(-1/a)$:

$$-\frac{1}{a}\tilde{S}_\tau[f](z) = -\frac{1}{a}(1+az)f'(z) + \frac{1}{a}naf(z).$$

Положим в правой части последнего равенства $b := (-1/a)$ и получим полярную производную относительно полюса b:

$$D_b[f](z) = (b-z)f'(z) + nf(z).$$

История изучения нулей многочлена $D_b[f](z)$ (здесь f, как прежде, многочлен степени n) отправляет нас в 1898 год, к труду под названием «Работы Лагерра» [30], а именно, к статье «Замечания по нескольким пунктам теории численных уравнений» [79, с. 64–66]. В представленной статье есть ссылка на более раннюю (эту же статью) 1878 года, опубликованную в журнале NOUVELLES ANNALES de MATHEMATIQUES.

Стоит отметить, что полярная производная встречается в работах других известных математиков, например у Д. Пойа [31] и Г. Сегё [32] в «Задачи и проблемы анализа» [89, с. 61].

[30] Эдмон Никола Лагерр (1834–1886).
[31] Дьёрдь Пойа (1887 – 1985).
[32] Габор Сегё (1895 – 1985).

Термин «полярная», в частности, «производная относительно полюса b», исходит от следующего её определения (см., например, [39]):

$$D_b[f](z) := -\left[\frac{f(z)}{(z-b)^n}\right]'(z-b)^{n+1} =$$

$$= -\left[\frac{f'(z)(z-b)^n - n(z-b)^{n-1}f(z)}{(z-b)^{2n}}\right](z-b)^{n+1} =$$

$$= -(z-b)^{n-1}\left[\frac{f'(z)(z-b) - nf(z)}{(z-b)^{2n}}\right](z-b)^{n+1} =$$

$$= -\left[f'(z)(z-b) - nf(z)\right] = (b-z)f'(z) + nf(z)$$

В действительности понятие полярной производной является обобщением обычной производной, т. к.

$$\lim_{b\to\infty}\left\{\frac{D_b[f](z)}{b}\right\} := f'(z).$$

Учитывая представленную взаимосвязь полярной производной и оператора Смирнова, отмечу несколько недавних работ с участием полярной производной, например работы А. Лимана, В. М. Шаха [81], А. Азиза [47], Н. А. Ратера [97], М. Ю. Мира, Г. М. Софи [88] и их соавторов.

Более подробно о полярной производной можно прочесть в книге 2017 года «Достижения в теории приближений и прикладном комплексном анализе» в статье Н. К. Говила и П. Кумара [66].

Заключение

В данной диссертации решены несколько задач теории функций комплексного переменного. В ходе исследования была изучена история возникновения задач, произведён обзор и анализ научной литературы по теме исследования, обоснована актуальность.

В работе доказаны оценки радиуса Бора в двух классах аналитических функций в круге: $\mathcal{U}_\alpha$ и в классе выпуклых функций $\mathfrak{L}\mathcal{U}_\alpha$.

Изучение понятия обобщённого оператора Чезаро привело к возможности уточнения его вида для аналитических функций в единичном круге, принадлежащих линейно-инвариантным семействам. Это уточнение позволило получить более точную оценку сверху этого оператора в классе $\mathfrak{L}\mathcal{U}_\alpha$.

В диссертации получены аналоги теорем, связанных с дифференциальными неравенствами для комплексных многочленов типа С. Н. Бернштейна и В. И. Смирнова. Доказанные в работе результаты позволяют получать дифференциальные неравенства для более широкого круга многочленов по сравнению с ранее полученными.

Таким образом, в диссертации были получены следующие результаты:

- Получена оценка радиуса Бора для аналитических функций в единичном круге, принадлежащих универсальному линейно-инвариантному семейству $\mathcal{U}_\alpha$;

- Доказана оценка радиуса Бора для аналитических функций в единичном круге, принадлежащих классу

$$\mathfrak{L}\mathcal{U}_\alpha = \{f(z) = \log g'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f) z^n : \ g \in \mathcal{U}_\alpha\};$$

- Доказана ограниченность обобщённого оператора Чезаро для аналитических функций в единичном круге, принадлежащих $\mathfrak{L}\mathcal{U}_\alpha$;
- Получены аналоги классической теоремы В. И. Смирнова, в которых снято ограничение на степени многочленов $f(z)$ и $F(z)$, а также расширены возможности локализации нулей многочлена $F(z)$.

Список основных обозначений

Δ – единичный круг $\{z : |z| < 1\}$;
$\partial\Delta$ – граница единичного круга $\{z : |z| = 1\}$;
Δ_ρ – открытый круг радиуса ρ: $\{z \in \Delta : |z| < \rho\}$;
$\mathcal{B}$ – класс ограниченных и аналитических в Δ функций;
$\mathcal{M}$ – класс аналитических в Δ функций $f(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n z^n$, равномерно ограниченных на компактах из круга Δ;
л.и.с. – линейно-инвариантное семейство;
$\mathfrak{M}$ – линейно-инвариантное семейство (л.и.с.);
$\mathcal{U}_\alpha$ – универсальное линейно-инвариантное семейство;
$\mathcal{K}$ – класс выпуклых функций;
S – класс аналитических и однолистных в Δ функций;
$\mathfrak{LM} := \{f(z) = \log g'(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(f) z^n : \ g \in \mathfrak{M}\}$;
$g_\phi(z) = \dfrac{g(\phi(z)) - g(\phi(0))}{g'(\phi(0))\phi'(0)}, \ a \in \Delta, \ \theta \in \mathbb{R}, \ \phi(z) = e^{i\theta}\dfrac{z+a}{1+\overline{a}z}$;
$(b)_n := b(b+1)(b+2)\dots(b+n-1) = \dfrac{\Gamma(b+n)}{\Gamma(b)}$ – символ Похгаммера, $n \in \mathbb{N}, \beta \in \mathbb{C}$;
$A_n^\beta := \dfrac{(\beta+1)_n}{(1)_n}$;
$C[f](z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} a_{k-1} \right) z^{n-1}$ – классический оператор Чезаро;
$C^\beta[f](z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{1}{A_{n-1}^{\beta+1}} \sum\limits_{k=1}^{n} A_{n-k}^\beta a_{k-1} \right) z^{n-1}$ – обобщённый оператор Чезаро;
$[\zeta, \eta]$ – отрезок в комплексной плоскости $\mathbb{C}$ с концами в точках ζ и η;
$D_{\rho,n}$ – образ круга $\{t \in \mathbb{C} : |t| < \rho\}$ при отображении $\psi(t) = \dfrac{nt}{t+1}$, $\rho \geq 1$ – фиксированное число, $n \in \mathbb{N}$;
$D^*_{\rho,n}$ – дополнение к замкнутому кругу с диаметром $\left[-\frac{n\rho}{1-\rho}, \frac{n\rho}{1+\rho}\right]$;
$S_\tau[f](z) : f(z) \longrightarrow (zf'(z) - \tau f(z))$ – оператор Смирнова, $\tau \in \mathbb{C}$.

Список литературы

[1] *Абдуллаев, А. Р.* О спектре оператора Чезаро / А. Р. Абдуллаев, Э. В. Плехова // *Научно-технический вестник Поволжья.* — 2011. — № 4. — С. 33—37. URL: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=17963144 (дата обращения 15.03.2026)

[2] *Азбелев, Н. В.* Элементы современной теории функционально-дифференциальных уравнений. Методы и приложения / Н. В. Азбелев, В. П. Максимов, Л. Ф. Рахматуллина. — М.: Институт компьютерных исследований, 2002. — 384 с. ISBN 5-93972-112-5

[3] *Айзенберг, Л. А.* Некоторые замечания о радиусе Бора для степенных рядов / Л. А. Айзенберг, И. Б. Гроссман, Ю. Ф. Коробейник // *Известия высших учебных заведений. Математика.* — 2002. — № 10. — С. 3—10. URL: http://mi.mathnet.ru/ivm1073 (дата обращения 06.05.2026)

[4] *Айзенберг, Л. А.* О радиусе Бора для двух классов голоморфных функций / Л. А. Айзенберг, А. Видрас // *Сибирский математический журнал.* — 2004. — Т. 45, № 4. — С. 734—746. URL: https://www.maths.tcd.ie/EMIS/journals/SMZ/2004/04/734.pdf (дата обращения 29.03.2026)

[5] *Александров, И. А.* Методы геометрической теории аналитических функций / И. А. Александров. — Томск: Томский государственный университет, 2001. — 220 с.

[6] *Бернштейн, С. Н.* О наилучшем приближении непрерывных функций посредством многочленов данной степени. — Харьков: Типография и литография М. Зильберберг и сыновья, 1912. — 154 с.

[7] *Бернштейн, С. Н.* О теореме В. А. Маркова / С. Н. Бернштейн // *Труды Ленинградского индустриального института.* — 1938. — С. 8—13.

[8] *Бернштейн, С. Н.* Собрание сочинений. Т. I: Конструктивная теория функций [1905–1930] / С. Н. Бернштейн. — М.: Изд-во АН СССР, 1952. — 582 с.

[9] *Бернштейн, С. Н.* Собрание сочинений: Т. II: Конструктивная теория функций [1931—1953] / С. Н. Бернштейн. — М.: Изд-во АН СССР, 1954. — 628 с.

[10] *Бернштейн, С. Н.* Экстремальные свойства полиномов и наилучшее приближение непрерывных функций одной вещественной переменной / С. Н. Бернштейн. — М.: ОНТИ, 1937. — 203 с. URL: http://e-heritage.ru/Book/10075470 (дата обращения 18.04.2026)

[11] *Воробьев, Н. Н.* Теория рядов / Н. Н. Воробьев. — 4-е изд., перераб. и доп. — М.: Наука, 1979. — 408 с.

[12] *Дубинин, В. Н.* Методы геометрической теории функций в классических и современных задачах для полиномов / В. Н. Дубинин // *Успехи математических наук.* — 2012. — Т. 67, № 4 (406). — С. 3—88. URL: https://elibrary.ru/item.asp?id=20423456&ysclid=mmrun95hom151325436 (дата обращения 15.03.2026)

[13] *Дубинин, В. Н.* Теоремы искажения для полиномов на окружности / В. Н. Дубинин // *Математический сборник.* — 2000. — Т. 191, № 12. — С. 51—60. URL: https://www.mathnet.ru/links/f9e0c0a6fab303304c31738ea61db8ab/sm528.pdf (дата обращения 15.03.2026)

[14] *Голузин, Г. М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного / Г. М. Голузин. — 2-е изд. — М.: Наука, 1966. — 628 с.

[15] *Исмагилов, А. А.* Неравенства Бора в некоторых классах аналитических функций / А. А. Исмагилов, А. В. Каюмова, И. Р. Каюмов, С. Понnусами // *Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры.* — 2018. — Т. 153. — С. 69–83. DOI: http://mi.mathnet.ru/into364

Journal of Mathematical Sciences. — 2021. — Vol. 252, № 3. — P. 360–373. DOI: https://doi.org/10.1007/s10958-020-05165-6

[16] *Колмогоров, А. Н.* Элементы теории функций и функционального анализа / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. — 4-е изд., перераб. — М.: Наука, 1976. — 543 с.

[17] *Кунгурцева, А. В.* Об одном классе краевых задач для сингулярных уравнений / А. В. Кунгурцева // *Известия высших учебных заведений. Математика.* — 1995. — № 9. — С. 30—36. DOI: http://mi.mathnet.ru/ivm1802

[18] *Лауринчикас, А.* О дзета-функции Гурвица с алгебраическим иррациональным параметром. II / А. Лауринчикас // *Труды Математического института им. В. А. Стеклова.* — 2021. — Т. 314. — С. 134–144. DOI: https://doi.org/10.4213/tm4165

[19] *Лауринчикас, А.* Об универсальности дзета-функции Лерха / А. Лауринчикас // *Труды Математического института им. В.А. Стеклова.* — 2012. — Т. 276. — С. 173–181. URL: https://www.mathnet.ru/links/a5d76bb53eb415d2321e10a9017dd3cb/tm3353.pdf (дата обращения 20.04.2026)

[20] *Марков, А. А.* Избранные труды по теории непрерывных дробей и теории функций, наименее уклоняющихся от нуля / А. А. Марков. — М.–Л.: Гостехиздат, 1948. — 412 с. URL: https://rusneb.ru/catalog/000199_000009_005836134/?ysclid=ml9r7lqws2148711307 (дата обращения 15.03.2026)

[21] *Марков, А. А.* Об одном вопросе Д. И. Менделеева / А. А. Марков // *Записки Императорской Академии наук.* — 1890. — Т. 62. — С. 1—24.

[22] *Марков, В. А.* О функциях, наименее уклоняющихся от нуля в данном промежутке / В. А. Марков. — СПб.: Типография Императорской Академии наук, 1892. — 111 с. URL: https://rusneb.ru/catalog/000199_000009_003662672/?ysclid=ml9s0kqwrl188013446 (дата обращения 15.03.2026)

[23] *Матиясевич, Ю. В.* Дзета-функция Римана и конечные ряды Дирихле / Ю. В. Матиясевич // *Алгебра и анализ.* — 2015. — Т. 27, № 6. — С. 174–198. DOI: http://mi.mathnet.ru/aa1472

[24] *Менделеев, Д. И.* Избранные сочинения. Т. III: Исследование водных растворов по удельному весу / Д. И. Менделеев. — Л.: ОНТИ, 1934. — XX, 467 с.

[25] *Менделеев, Д. И.* Исследование водных растворов по удельному весу / Д. И. Менделеев. — СПб.: Тип. В. Демакова, 1887. — XXI, 520 с. URL: http://www.e-heritage.ru/Book/10070356

[26] *Мергелян, С. Н.* Равномерные приближения функций комплексного переменного / С. Н. Мергелян // *Успехи математических наук.* — 1952. — Т. 7, № 2(48). — С. 31—122. DOI: http://mi.mathnet.ru/rm8302

[27] *Плаксина, И. М.* Об одной модельной сингулярной задаче / И. М. Плаксина // *Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика.* — 2010. — № 1. — С. 19—23. URL: https://elibrary.ru/item.asp?id=13361921 (дата обращения 15.03.2026)

[28] *Плаксина, В. П.* О разрешимости задачи Коши для одного квазилинейного сингулярного функционально-дифференциального уравнения / В. П. Плаксина, И. М. Плаксина, Э. В. Плехова // *Известия высших учебных заведений. Математика. Математика.* — 2016. — № 2. — С. 54—61. DOI: http://mi.mathnet.ru/ivm9082

[29] *Половинкин, Е. С.* Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа. — 2-е изд. испр. и доп. / Е. С. Половинкин, М. В. Балашов. — М.: Физматлит, 2007. — 440 с. ISBN 978-5-9221-0896-6

[30] *Рокафеллар, Р. Т.* Выпуклый анализ / Р. Т. Рокафеллар. — М.: Мир, 1973. — 469 с.
Convex analysis / R. T. Rockafellar. — Princeton: Princeton Univ. Press, 1970. — 451 p.

[31] *Симонов, Н. И.* Прикладные методы анализа у Эйлера / Н. И. Симонов. — М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1957. — 167 с.

[32] *Смирнов, В. И.* Конструктивная теория функций комплексного переменного / В. И. Смирнов, Н. А. Лебедев. — М.–Л.: Наука, 1964. — 440 с.

[33] *Старков, В. В.* К оценке коэффициентов в классе U'_α локально однолистных функций / В. В. Старков // *Вестник ЛГУ.* — 1984. — № 13. — С. 48—54.

[34] *Старков, В. В.* Линейно-инвариантные семейства аналитических в круге функций / В. В. Старков. — Петрозаводск: Издательство ПетрГУ, 2019. — 122 с. ISBN 978-5-8021-3606-5

[35] *Титчмарш, Э. Ч.* Теория дзета-функции Римана / Э. Ч. Титчмарш; пер. с англ. М. А. Евграфова; под ред. А. О. Гельфонда. — М.: Издательство иностранной литературы, 1953. — 408 с.

[36] *Фаддеев, Л. Д.* Лекции по квантовой механике для студентов-математиков / Л. Д. Фаддеев, О. А. Якубовский. — Л.: Издательство Ленинградского университета, 1980. — 200 с. URL: `https://djvu.online/file/rZIhuUc0ey6nD?ysclid=mlb56e9v8z340351565` (дата обращения 28.03.2026)

[37] *Халмош, П.* Гильбертово пространство в задачах / пер. с англ. И. Д. Новикова и Т. В. Соколовской; под ред. Р. А. Минлоса. — М.: Мир, 1970. — 352 с. URL: `https://ikfia.ysn.ru/wp-content/uploads/2018/01/Halmosh1970ru.pdf` (дата обращения 14.04.2026)
A Hilbert Space Problem Book / P. R. Halmos. — Graduate Texts in Mathematics, Vol. 19 (2nd ed.). — New York: Springer-Verlag, 1982. — XVII, 369 p. DOI: `https://doi.org/10.1007/978-1-4684-9330-6`

[38] *Харди, Г.* Расходящиеся ряды / Г. Харди. — М.: ИЛ, 1951. — 504 с. URL: `http://www.physics.gov.az/book_R/Hardy2.pdf` (дата обращения 28.03.2026)

[39] *Хуссейн, И.* Обобщения неравенств типа Бернштейна для полиномов с участи-

ем полярной производной / И. Хуссейн // *Сибирский математический журнал.* — 2022. — Т. 63, № 3. — С. 690—698. DOI: http://mi.mathnet.ru/smj7686

[40] *Эйлер, Л.* Дифференциальное исчисление / Л. Эйлер. — М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1949. — 580 с. URL: https://ikfia.ysn.ru/wp-content/uploads/2018/01/Ejler1949ru.pdf (дата обращения 18.04.2026)

[41] *Abu-Muhanna, Y.* On the Bohr Inequality / Y. Abu-Muhanna, R. M. Ali, S. Ponnusamy // *Progress in Approximation Theory and Applicable Complex Analysis.* — Cham: Springer, 2017. — P. 269–300. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-319-49242-1_13

[42] *Aizenberg, L. A.* Multidimensional analogues of Bohr's theorem on power series / L. A. Aizenberg // *Proc. Amer. Math. Soc.* — 2000. — Vol. 128, № 4. — P. 1147—1155. DOI: https://doi.org/10.1090/S0002-9939-99-05084-4

[43] *Ali, R. M.* A note on Bohr's phenomenon for power series / R. M. Ali, R. W. Barnard, A. Yu. Solynin // *J. Math. Anal. Appl.* — 2017. — Vol. 449, № 1. — P. 154—167. DOI: https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2016.11.049

[44] *Apostol, T. M.* On the Lerch zeta function / T. M. Apostol // *Pacific J. Math.* — 1951. — Vol. 1, № 2. — P. 161–167. URL: https://www.projecteuclid.org/journals/pacific-journal-of-mathematics/volume-1/issue-2/On-the-Lerch-zeta-function/pjm/1103052188.full (дата обращения 20.04.2026)

[45] *Aziz, A.* Inequalities for the derivative of a polynomial / A. Aziz // *Proc. Amer. Math. Soc.* — 1983. — Vol. 89. — P. 259—266. DOI: https://doi.org/10.1090/S0002-9939-1983-0712634-5

[46] *Aziz, A.* Inequalities for a polynomial and its derivative / A. Aziz, Q. M. Dawood // *J. Approx. Theory.* — 1988. — Vol. 54, № 3. — P. 306—313. DOI: https://doi.org/10.1016/0021-9045(88)90006-8

[47] *Aziz, A.* L_q norm inequalities for the polar derivative of a polynomial / A. Aziz, N. A. Rather, Q. Aliya // *Math. Ineq. Appl.* — 2008. — Vol. 11. — P. 283–296. DOI: https://doi.org/10.7153/mia-11-20

[48] *Bernoulli, J.* Positionum de seriebus infinitis. Pars tertia: Quadraturis spatiorum et rectificationibus curvarum / J. Bernoulli. — Basileae: Typis Joh. Conradi, 1696.

[49] *Bernstein, S. N.* Sur la limitation des derivees des polynomes / S. N. Bernstein // *C. R. Acad. Sci. Paris.* — 1930. — Vol. 190. — P. 338—341.

[50] *Bieberbach, L.* Über die Koeffizienten derjenigen Potenzreihen, welche eine schlichte Abbildung des Einheitskreises vermitteln / L. Bieberbach // *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss.* — 1916. — № 138. — P. 940—955. URL: https://edoc.bbaw.de/opus4-bbaw/frontdoor/deliver/index/docId/5329/file/BBAW_SB_1916_TB2_S940_955.pdf

[51] *Boas, R. P.* L^p inequalities for polynomials and entire functions / R. P. Boas, Q. I. Rahman // *Arch. Rational Mech. Anal.* — 1962. — Vol. 11. — P. 34—39. DOI: https://doi.org/10.1007/BF00253927

[52] *Boas, H. P.* Bohr's power series theorem in several variables / H. P. Boas, D. Khavinson // *Proc. Amer. Math. Soc.* — 1997. — Vol. 125, № 10. — P. 2975—2979. DOI: https://doi.org/10.1090/S0002-9939-97-04270-6

[53] *Bohr, H.* A theorem concerning power series / H. Bohr // *Proc. Lond. Math. Soc.* — 1914. — Vol. 13, № 1. — P. 1—5. DOI: https://doi.org/10.1112/plms/s2-13.1.1

[54] *Campbell, D. M.* Linear space and linear-invariant families of locally univalent analytic functions / D. M. Campbell, J. A. Cima, J. A. Pfaltzgraff // *Manuscripta Math.* — 1971. — Vol. 4. — P. 1—30. DOI: https://doi.org/10.1007/BF01168902

[55] *Cesàro, E.* Sur la multiplication des séries / E. Cesàro // *Bull. Sci. Math.* — 1890. — Vol. 14, № 2. — P. 114—120.

[56] *de Branges, L.* A proof of the Bieberbach conjecture / L. de Branges // *Acta Math.* — 1985. — Vol. 154, № 1—2. — P. 137—152. DOI: https://doi.org/10.1007/BF02392821

[57] *Defant, A.* Dirichlet series and holomorphic functions in higher dimensions / A. Defant, D. García, M. Maestre, P. Sevilla-Peris. — New Mathematical Monographs, Vol. 37. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2019. — 706 p. DOI: https://doi.org/10.1017/9781108691611

[58] *Dewan, K. K.* Generalization of certain well known polynomial inequalities / K. K. Dewan, S. Hans // *J. Math. Anal. Appl.* — 2010. — Vol. 363, № 1. — P. 38—41. DOI: https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2009.07.049

[59] *Dixon, P. G.* Banach algebras satisfying the non-unital von Neumann inequality / P. G. Dixon // *Bull. Lond. Math. Soc.* — 1995. — Vol. 27, № 4. — P. 359—362. DOI: https://doi.org/10.1112/blms/27.4.359

[60] *Duren, P. L.* Theory of H^p Spaces / P. L. Duren. — New York and London: Academic Press, 1970. — XIII, 258 p.

[61] *Euler, L.* Institutiones calculi differentialis / L. Euler. — Petropolitanae: Academia Imperialis Scientiarum, 1755. — XXIV, 880 p. URL: https://archive.org/details/bub_gb_sYE_AAAAcAAJ/mode/2up (дата обращения 15.03.2026)

[62] *Fejér, L.* Untersuchungen über Fouriersche Reihen / L. Fejér // *Math. Ann.* — 1903. — Vol. 58. — P. 51—69. DOI: https://doi.org/10.1007/BF01447779

[63] *Ganenkova, E. G.* Variations on a theme of the Marden and Smirnov operators, differential inequalities for polynomials / E. G. Ganenkova, V. V. Starkov // *J. Math. Anal. Appl.* — 2019. — Vol. 476, № 2. — P. 696—714. DOI:https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2019.04.006

[64] *Garunkštis, R.* The Lerch zeta-function / R. Garunkštis, A. Laurinčikas // *Integral Transforms Spec. Funct.* — 2000. — Vol. 10, № 3-4. — P. 211–226. URL: https://les-mathematiques.net/vanilla/uploads/editor/1r/lvbt73jvpz2n.pdf (дата обращения 20.04.2026)

[65] *Godula, I.* Applications of the idea of Möbius invariance to obtain equivalent definitions of Bloch functions / I. Godula, V. V. Starkov // *Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska Sect. A.* — 1995. — Vol. 49. — P. 41—58. URL: `https://dlibra.umcs.lublin.pl/dlibra/publication/33665/edition/30521/content?ref=L3B1YmxpY2F0aW9uLzM1MDQyL2VkaXRpb24vMzE4MDQ` (дата обращения 15.03.2026)

[66] *Govil, N. K.* On Bernstein-Type Inequalities for the Polar Derivative of a Polynomial / N. K. Govil, P. Kumar // *Progress in Approximation Theory and Applicable Complex Analysis* / eds. N. Govil, R. Mohapatra, M. Qazi, G. Schmeisser. — Cham: Springer, 2017. — P. 41—74. DOI: `https://doi.org/10.1007/978-3-319-49242-1_3`

[67] *Guo, Y.* Cesàro-like operators between the Bloch space and Bergman spaces / Y. Guo, P. Tang, X. Zhang // *Ann. Funct. Anal.* — 2024. — Vol. 15, Art. 8. DOI: `https://doi.org/10.1007/s43034-023-00309-6`

[68] *Hong, H.-K.* Application of Cesàro mean and the *L*-curve for the deconvolution problem / H.-K. Hong, C. H. Chen // *Soil Dyn. Earthquake Eng.* — 1995. — Vol. 14. — P. 361—373. DOI: `https://doi.org/10.1016/0148-9062(96)87572-3`

[69] *Hu, Z.* Extended Cesáro operators on the Bloch space in the unit ball of $\mathbb{C}^n$ / Z. Hu // *Acta Math. Sci.* — 2003. — Vol. 23, № 4. — P. 561–566. DOI: `https://doi.org/10.1016/S0252-9602(17)30500-3`

[70] *Ismagilov, A.* Sharp Bohr inequality / A. Ismagilov, I. R. Kayumov, S. Ponnusamy // *J. Math. Anal. Appl.* — 2020. — Vol. 489, № 1. — Art. 124147. DOI: `https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2020.124147`

[71] *Kayumov, I. R.* Estimate of logarithmic coefficients of locally univalent function / I. R. Kayumov, V. V. Starkov // In: Laine, Martio (Ed.) *XVIth Rolf Nevanlinna Colloquium — Berlin—New York: Walter de Gruyter & Co.* — 1996. — P. 239—245.

[72] *Kayumov, I. R.* Bohr radius for locally univalent harmonic mappings /

I. R. Kayumov, S. Ponnusamy, N. Shakirov // *Math. Nachr.* — 2018. — Vol. 291, № 11—12. — P. 1757—1768. DOI: `https://doi.org/10.1002/mana.201700068`

[73] *Kayumov, I. R.* Bohr-Rogosinski phenomenon for analytic functions and Cesáro operators / I. R. Kayumov, D. M. Khammatova, S. Ponnusamy // *J. Math. Anal. Appl.* — 2021. — Vol. 496, № 2. — Art. 124824. DOI: `https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2020.124824`

[74] *Kayumov, I. R.* The Bohr inequality for the generalized Cesáro averaging operators / I. R. Kayumov, D. M. Khammatova, S. Ponnusamy // *Mediterr. J. Math.* — 2022. — Vol. 19. — Art. 19. DOI: `https://doi.org/10.1007/s00009-021-01931-1`

[75] *Khasyanov, R. Sh.* The Bohr radius and the Hadamard convolution operator / R. Sh. Khasyanov // *J. Math. Anal. Appl.* — 2024. — Vol. 531, № 1. — Art. 127782. — DOI: `https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2023.127782`.

[76] *Khasyanov, R. Sh.* The Bohr radius of the weighted Bloch spaces / R. Sh. Khasyanov // *Lobachevskii J. Math.* — 2023. — Vol. 44, № 7. — P. 2757—2764. DOI: `https://doi.org/10.1134/S1995080223070259`

[77] *Kompaneets, E. G.* Smirnov's inequality for polynomials with zeros outside the unit disc / E. G. Kompaneets, V. V. Starkov // *Probl. Anal. Issues Anal.* — 2021. — Vol. 10 (28), № 3. — P. 71—90. DOI: `https://www.mathnet.ru/eng/pa332`

[78] *Kompaneets, E. G.* On the Smirnov type inequality for polynomials / E. G. Kompaneets, V. V. Starkov // *Math. Notes.* — 2022. — Vol. 111, № 3. — P. 388—397. DOI: `https://doi.org/10.1134/S0001434622030063`

[79] *Laguerre, E.* Oeuvres de Laguerre / E. Laguerre. — Vol. I: Algebra. — Calculus Integral. — Paris: Gauthier-Villars et Fils, 1898. — 471 p. URL: `https://www.google.ru/books/edition/Oeuvres_de_Laguerre/sgvV5T6nfwUC?hl=ru&gbpv=0` (дата обращения 15.03.2026)

[80] *Lerch, M.* Note sur la fonction $\mathfrak{R}(w,x,s) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{e^{2k\pi ix}}{(w+k)^s}$ / M. Lerch // *Acta Math.* — 1887. — Vol. 11. — P. 19–24. DOI: `https://doi.org/10.1007/BF02612318`

[81] *Liman, A.* Inequalities for the Polar Derivative of a Polynomial / A. Liman, R. N. Mohapatra, W. M. Shah // *Complex Analysis and Operator Theory.* — 2012. — Vol. 6. — P. 1199—1209. DOI: https://doi.org/10.1007/s11785-010-0120-3

[82] *Lin, R.-Y.* The Bohr-type inequalities for holomorphic mappings with lacunary series in several complex variables / R.-Y. Lin, M.-S. Liu, S. Ponnusamy // *Acta Math. Sci.* — 2023. — Vol. 43, № 1. — P. 63—79. DOI: https://doi.org/10.1007/s10473-023-0105-8

[83] *Marden, M.* The geometry of the zeros of a polynomial in a complex variable / M. Marden. — Math. Surveys, № 3. — Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1949. — 192 p. URL: https://archive.org/details/dli.ernet.16968/page/182/mode/1up (дата обращения 15.03.2026)
Geometry of Polynomials / M. Marden. — 2nd ed. — Providence, RI: American Mathematical Society, 1966. — XI, 243 p. URL: https://archive.org/details/geometryofpolyno0000unse_no03_1966/page/n4/mode/1up (дата обращения 15.03.2026)

[84] *Mashreghi, J.* The Wonders of the Cesàro Operator / J. Mashreghi, W. T. Ross. — Cham: Birkhäuser, 2026. — XXIII, 269 p. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-032-08733-1

[85] *Merkator, N.* Logarithmotechnia: sive Methodus construendi Logarithmos nova, accurata, & facilis / N. Merkator. — Londini: M. Pitt, 1668. — 47 p. URL: https://archive.org/details/bim_early-english-books-1641-1700_logarithmotechnia-_mercator-nicolaus_1668/page/3/mode/1up

[86] *Milovanović, G. V.* On Bernstein-type estimates for linear operators acting on polynomials / G. V. Milovanović, I. Qasim, A. Mir // *J. Math. Inequal.* — 2025. — Vol. 19, № 4. — P. 1313–1326. DOI: http://dx.doi.org/10.7153/jmi-2025-19-84

[87] *Mir, A.* Comparison inequalities of Bernstein-type between polynomials with

restricted zeros / A. Mir // *Appl. Anal. Discrete Math.* — 2022. — Vol. 16, № 1. — P. 55–65. DOI: https://doi.org/10.2298/AADM200911029M

[88] *Mir, M. Y.* Some refinements of Bernstein type inequalities for rational functions with zeros in a half plane / M. Y. Mir, G. M. Sofi, S. L. Wali, W. M. Shah // *Probl. Anal. Issues Anal.* — 2025. — Vol. 14 (32), № 3. — P. 65–75. DOI: https://doi.org/10.15393/j3.art.2025.19410

[89] *Polya, G.* Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis / G. Polya, G. Szego. — Vol. II. — Berlin: Springer, 1925. — X, 412 p. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-662-38380-3

[90] *Pommerenke, Ch.* On the derivative of a polynomial / Ch. Pommerenke // *Michigan Math. J.* — 1959. — Vol. 6, № 4. — P. 373—375. DOI: https://doi.org/10.1307/mmj/1028998284

[91] *Pommerenke, Ch.* Linear-invariante Familien analytischer Funktionen I / Ch. Pommerenke // *Math. Ann.* — 1964. — Vol. 155. — P. 108—154. DOI: https://doi.org/10.1007/BF01344077

[92] *Pommerenke, Ch.* Univalent functions / Ch. Pommerenke. — Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht, 1975. — 376 p.

[93] *Pommerenke, Ch.* Schlichte Funktionen und analytische Funktionen von beschränkter mittlerer Oszillation / Ch. Pommerenke // *Comment. Math. Helv.* — 1977. — Vol. 52. — P. 591—602. DOI: https://doi.org/10.1007/BF02567392

[94] *Rahman, Q. I.* L^p inequalities for polynomials / Q. I. Rahman, G. Schmeisser // *J. Approx. Theory.* — 1988. — Vol. 53, № 1. — P. 26—32. DOI: https://doi.org/10.1016/0021-9045(88)90073-1

[95] *Rahman, Q. I.* Analytic theory of polynomials / Q. I. Rahman, G. Schmeisser. — Oxford: Oxford Univ. Press, 2002. — 742 p.

[96] *Rather, N. A.* Certain Bernstein-type L_p inequalities for polynomials / N. A. Rather, A. Bhat, S. Gulzar // *Acta Sci. Math. (Szeged)* — 2023. — Vol. 89. — P. 545–557. DOI: https://doi.org/10.1007/s44146-023-00074-x

[97] *Rather, N. A.* Some inequalities for polynomials with restricted zeros/ N. A. Rather, I. Dar, A. Iqbal // *Annali dell'Università di Ferrara.* — 2021. — Vol. 67. — P. 183—189. https://doi.org/10.1007/s11565-020-00353-3

[98] *Rhaly, H. C.* Discrete generalized Cesàro operator / H. C. Rhaly // *Proc. Amer. Math. Soc.* — 1982. — Vol. 86, № 3. — P. 405—409. URL: https://www.jstor.org/stable/2044437

[99] *Sidon, S.* Über einen Satz von Herrn Bohr / S. Sidon // *Math. Z.* — 1927. — Vol. 26, № 1. — P. 731–732. DOI: https://doi.org/10.1007/BF01475487

[100] *Stempak, K.* Cesàro averaging operators / K. Stempak // *Proc. R. Soc. Edinb. Sect. A.* — 1994. — Vol. 124. — P. 121—126. DOI: https://doi.org/10.1017/S030821050002922X

[101] *Szegö, G.* Über einen Satz von A. Markoff / G. Szegö // *Math. Z.* — 1925. — Vol. 23. — P. 45—61. DOI: https://doi.org/10.1007/BF01506220

[102] *Tomić, M.* Sur un théorème de H. Bohr / M. Tomić // *Math. Scand.* — 1962. — Vol. 11. — P. 103–106. DOI: https://doi.org/10.7146/math.scand.a-10653

[103] *Xiao, J.* Cesàro-type operators on Hardy, BMOA and Bloch spaces / J. Xiao // *Arch. Math.* — 1997. — Vol. 68. — P. 398–406. DOI: https://doi.org/10.1007/s000130050072

Публикации автора по теме диссертации

Публикации в ведущих рецензируемых научных журналах, рекомендованных ВАК РФ

[104] *Ponnusamy, S.* The Bohr radius and its modifications for linearly invariant families of analytic functions / S. Ponnusamy, E. S. Shmidt, V. V. Starkov // *J. Math. Anal. Appl.* — 2024. — Vol. 533, № 1. — Art. 128039. DOI: https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2023.128039

[105] *Kompaneets, E. G.* On removing restrictions in the Bernstein theorem and its modifications / E. G. Kompaneets, V. V. Starkov, E. S. Shmidt // *Probl. Anal. Issues Anal.* — 2025. — Vol. 14 (32), № 3. — P. 23—43. URL: https://issuesofanalysis.petrsu.ru/article/genpdf.php?id=19212&lang=ru (дата обращения 15.03.2026)

[106] *Шмидт, Е. С.* Оценка оператора Чезаро в линейно-инвариантных семействах аналитических функций в круге / Е. С. Шмидт // *Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика.* — Пермь, 2026. — № 1 (72). — С. 43—50. URL: https://press.psu.ru/index.php/Math/article/view/10713 (дата обращения 14.04.2026)

Публикации в других изданиях

[107] *Шмидт, Е. С.* Радиус Бора для линейно-инвариантных семейств аналитических функций / Е. С. Шмидт // *Материалы международной научной конференции "Уфимская осенняя математическая школа - 2023".* — Уфа: Аэстерна, 2023. — Т. 1. — С. 153—155.

[108] *Шмидт, Е. С.* Оператор Чезаро в линейно-инвариантных семействах функций / Е. С. Шмидт // *Научно-исследовательская работа обучающихся и молодых учёных: материалы 76-й Всероссийской (с международным участием) научной конференции (1–21 апреля 2024 года).* — Петрозаводск: Издательство ПетрГУ, 2024. — С. 254—256.

[109] *Шмидт, Е. С.* О неравенствах типа Бернштейна и Смирнова для комплексных многочленов / Е. С. Шмидт // *Материалы международной научной конференции "Уфимская осенняя математическая школа-2024".* — Уфа: Аэстерна, 2024. — Т. 1. — С. 161—162.

[110] *Компанеец, Е. Г.* О снятии ограничений в теоремах С. Н. Бернштейна и В. И. Смирнова / Е. Г. Компанеец, В. В. Старков, Е. С. Шмидт // *Современные проблемы теории функций и их приложения: сборник статей. Вып. 23: материалы 23-й международной Саратовской зимней школы (Саратов, 27–30 января 2026 г.).* — Саратов: Издательство Саратовского государственного университета, 2026. — С. 109—114.